**Corrigé de l'examen du 6 janvier 2017**

**Exercice 1.**

(i) $\mathbb{C}P^2$ admet une décomposition cellulaire constituée de trois cellules, de dimension 0, 2 et 4. Par conséquent, la différentielle dans le complexe cellulaire est nulle pour tout choix de coefficients et nous obtenons $H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$ pour $*=0,2,4$ et $H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)=0$ sinon. De même pour $H_*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$.

Soit $h$ le générateur de $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$. Soit $u$ le générateur de $H^4(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$. Nous avons $hu=0$ et $u^2=0$ pour des raisons de dimension. La structure multiplicative de $H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$ est donc déterminée par la valeur de $h^2$. Montrons que $h^2=u$.

**Solution 1.** (utilise la dualité de Poincaré) Il suffit de montrer que $h^2\neq 0$. L'on évalue $h^2$ sur la classe fondamentale $[\mathbb{C}P^2]$ et l'on obtient

$$\langle h^2,[\mathbb{C}P^2]\rangle=\langle h,h\cap[\mathbb{C}P^2]\rangle\neq 0.$$

La première égalité est un fait général qui relie produit cup et produit cap. La deuxième inégalité découle du fait que $h\cap[\mathbb{C}P^2]\neq 0$ par dualité de Poincaré, c'est donc le générateur de $H_2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$, et l'unique élément non-nul $h$ de $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$ s'évalue de façon non-triviale sur cet unique élément non-nul de $H_2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$ puisque $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$ est le dual de $H_2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$.

**Solution 2.** (utilise le lien entre produit cup et produit d'intersection) Le dual de Poincaré de $h$ est une classe d'homologie non-triviale en degré 2, c'est donc nécessairement $incl_*[\mathbb{C}P^1]$, avec $incl:\mathbb{C}P^1\hookrightarrow\mathbb{C}P^2$ et $[\mathbb{C}P^1]$ la classe fondamentale de $\mathbb{C}P^1$. Le dual de Poincaré de $h^2$ est représenté par la classe fondamentale d'une sous-variété obtenue en intersectant deux représentants transverses de $incl_*[\mathbb{C}P^1]$. Or deux droites projectives transverses s'intersectent en un unique point, de sorte que le dual de Poincaré de $h^2$ est $[pt]\in H_0(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$. Puisque $[pt]\neq 0$, l'on a $h^2\neq 0$ et donc $h^2=u$.

**Solution 3.** (utilise la cohomologie de De Rham et le fait qu'elle est isomorphe à la cohomologie singulière à coefficients réels) Il existe une 2-forme sur $\mathbb{C}P^2$ ayant la propriété que son intégrale sur toute droite complexe vaut 1, et l'intégrale de son carré sur $\mathbb{C}P^2$ vaut 1 aussi. Ceci montre que la classe de cohomologie correspondante provient de $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$ et son carré est un générateur de $H^4(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$. Par conséquent $H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}[\omega]/(\omega^3)$, $|\omega|=2$, ce qui entraîne l'énoncé à coefficients $\mathbb{Z}/2$.

**Solution 4.** (due à C. Bérat, utilise la cohomologie de la Grassmannienne $\mathbb{C}P^\infty$) Nous savons que $H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}[c]$, $|c|=2$. L'inclusion $\mathbb{C}P^2\hookrightarrow\mathbb{C}P^\infty$ induit en cohomologie une flèche $H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})\to H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$ qui est un isomorphisme en degrés $\leqslant 4$ (cf. la structure cellulaire de $\mathbb{C}P^2$ et $\mathbb{C}P^\infty$) et qui respecte la structure multiplicative. Ceci implique $H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}[c]/(c^3)$, $|c|=2$. En réduisant les coefficients modulo 2 on obtient $H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)\simeq\mathbb{Z}/2[h]/(h^3)$, $|h|=2$.

(ii) **Solution 1.** Soit $\gamma$ le fibré tautologique sur $\mathbb{C}P^2$ et $\epsilon^r$ le fibré trivial complexe de rang $r$. Alors $T\mathbb{C}P^2=\mathrm{Hom}(\gamma,\gamma^\perp)$ et $T\mathbb{C}P^2\oplus\epsilon^1\simeq\mathrm{Hom}(\gamma,\gamma^\perp\oplus\gamma)=\mathrm{Hom}(\gamma,\epsilon^3)=\mathcal{O}(1)^{\oplus 3}$. Ainsi

$$w(T\mathbb{C}P^2)=w(T\mathbb{C}P^2\oplus\epsilon^1)=w(\mathcal{O}(1))^3.$$

Pour des raisons de dimension l'on a $w(\mathcal{O}(1)) = 1 + w_2(\mathcal{O}(1))$ et $w_2(\mathcal{O}(1))$ est la réduction modulo 2 de la classe d'Euler, qui coïncide avec la première classe de Chern $c_1(\mathcal{O}(1))$. Celle-ci est un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$, donc sa réduction modulo 2 est le générateur de $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$, c'est-à-dire $h$. Ainsi $w_2(\mathcal{O}(1)) = h$ et

$$w(T\mathbb{C}P^2) = (1+h)^3 = 1 + h + h^2.$$

**Solution 2.** Soit $a$ un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$. Alors

$$H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[a]/(a^3), \qquad |a| = 2.$$

Le raisonnement présenté pour la Solution 1 montre que $T\mathbb{C}P^2 \oplus \epsilon^1 \simeq \mathcal{O}(1)^{\oplus 3}$, de sorte que la classe de Chern totale de $\mathbb{C}P^2$ est égale à

$$c(T\mathbb{C}P^2) = (1+a)^3 = 1 + 3a + 3a^2.$$

La réduction modulo 2 de $c(T\mathbb{C}P^2)$ est donc égale à $1 + h + h^2$.

La classe de Stiefel-Whitney en degré maximal $w_4(T\mathbb{C}P^2) \in H^4(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$ est la réduction modulo 2 de la classe d'Euler $e(T\mathbb{C}P^2) \in H^4(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$. Cette dernière est égale à la classe de Chern en degré maximal $c_2 \in H^4(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$. Ainsi $w_4(T\mathbb{C}P^2) = h^2$.

Nous avons $w_2(T\mathbb{C}P^2) = \epsilon h$, avec

$$\epsilon = \langle w_2(T\mathbb{C}P^2), incl_*[\mathbb{C}P^1]\rangle = \langle incl^* w_2(T\mathbb{C}P^2), [\mathbb{C}P^1]\rangle = \langle w_2(T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1}), [\mathbb{C}P^1]\rangle \in \mathbb{Z}/2.$$

(Nous utilisons le fait que le dual de Poincaré de $h$ est $incl_*[\mathbb{C}P^1]$.) Puisque $T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1}$ scinde comme somme de deux fibrés en droites complexes – et en particulier orientables – $T\mathbb{C}P^1 \oplus \nu_{\mathbb{C}P^2}\mathbb{C}P^1$, par additivité de $c_1$ et de $w_2$ et puisque $c_1$ coïncide avec la classe d'Euler pour les fibrés en droites complexes, il s'ensuit que $w_2(T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1})$ est la réduction modulo 2 de $c_1(T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1})$. Vu que $\langle incl^* a, [\mathbb{C}P^1]\rangle = \pm 1$, on obtient $\epsilon = 1$ et $w_2(T\mathbb{C}P^2) = h$.

**Solution 3.** La classe de Stiefel-Whitney $w_4(T\mathbb{C}P^2) \in H^4(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$ en degré maximal est la réduction modulo 2 de la classe d'Euler $e(T\mathbb{C}P^2) \in H^4(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$. Or nous savons que $\langle e(T\mathbb{C}P^2), [\mathbb{C}P^2]\rangle = \chi(\mathbb{C}P^2) = 3$, dont $e(T\mathbb{C}P^2)$ vaut 3 fois un générateur de $H^4(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$. La réduction modulo 2 d'un tel générateur est $h^2$, le générateur de $H^4(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2)$. Ainsi

$$w_4(T\mathbb{C}P^2) = h^2.$$

Nous avons $w_2(T\mathbb{C}P^2) = \epsilon h$, avec $\epsilon = \langle w_2(T\mathbb{C}P^2), incl_*[\mathbb{C}P^1]\rangle \in \mathbb{Z}/2$ (nous utilisons à nouveau le fait que le dual de Poincaré de $h$ est $incl_*[\mathbb{C}P^1]$). Or

$$\langle w_2(T\mathbb{C}P^2), incl_*[\mathbb{C}P^1]\rangle = \langle incl^* w_2(T\mathbb{C}P^2), [\mathbb{C}P^1]\rangle = \langle w_2(T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1}), [\mathbb{C}P^1]\rangle.$$

Nous avons une décomposition en somme directe $T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1} = T\mathbb{C}P^1 \oplus \nu_{\mathbb{C}P^2}\mathbb{C}P^1$. Or $T\mathbb{C}P^1 \simeq \mathcal{O}(2)$ et $\nu_{\mathbb{C}P^2}\mathbb{C}P^1 \simeq \mathcal{O}(1)$. Ainsi

$$\langle c_1(T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1}), [\mathbb{C}P^1]\rangle = \langle c_1(\mathcal{O}(2)) + c_1(\mathcal{O}(1)), [\mathbb{C}P^1]\rangle = 3.$$

La classe de Chern d'un fibré en droites complexes coïncide avec sa classe d'Euler vu comme fibré de rang 2 orienté, et sa classe de Stiefel-Whitney maximale $w_2(T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1})$ en est la réduction modulo 2. Nous obtenons $\langle w_2(T\mathbb{C}P^2|_{\mathbb{C}P^1}), [\mathbb{C}P^1]\rangle = 1$ et donc

$$w_2(T\mathbb{C}P^2) = h.$$

(iii) Soit $\epsilon^r$ le fibré trivial de rang $r$ (ici, sur $S^6$). Nous avons $w(TS^6) = w(TS^6 \oplus \epsilon^1) = w(\epsilon^7) = 1$. Par fonctorialité $w(TS^6|_{\mathbb{C}P^2}) = 1$. En vue de $T\mathbb{C}P^2 \oplus \nu = TS^6|_{\mathbb{C}P^2}$ nous obtenons

$$w(T\mathbb{C}P^2)w(\nu) = 1.$$

Nous savons que cette équation détermine uniquement $w(\nu)$, et il suffit de vérifier l'identité $(1 + h + h^2)(1 + h) = 1$.

(iv) 1. **Solution 1.** Nous avons une décomposition en somme directe $TM \oplus \nu = TS^6|_M$. Puisque $TM$ et $TS^6$ sont orientables, il en est de même pour $\nu$. En effet, choisissons des orientations de $TM$ et $TS^6$. Une recette pour orienter $\nu$ est par exemple la suivante : un repère $(v_1, v_2) \in \nu_p$, $p \in M$ est positif si et seulement si, en choisissant un repère positif $(e_1, e_2, e_3, e_4) \in T_pM$, le repère $(e_1, e_2, e_3, e_4, v_1, v_2) \in T_pS^6$ est positif.

**Solution 2.** La première classe de Stiefel-Whitney est additive par rapport aux sommes directes et son annulation est un critère d'orientabilité. Ainsi $w_1(TM \oplus \nu) = w_1(TM) + w_1(\nu)$. Par ailleurs $w_1(TM) = 0$ car $TM$ est orientable, et $w_1(TM \oplus \nu) = w_1(TS^6|_M) = 0$ car $TS^6$ est orientable et donc sa restriction à $M$ l'est aussi. Nous obtenons $w_1(\nu) = 0$, donc $\nu$ est orientable.

2. Nous utilisons le théorème du voisinage tubulaire : il existe un voisinage $V$ de la section nulle $M$ dans $\nu$ et un voisinage $T$ de $M$ dans $S^6$ avec un difféomorphisme $(V, M) \simeq (T, M)$ qui vaut $\mathrm{Id}_M$ sur $M$. Quitte à restreindre $V$ et $T$ l'on peut supposer que $V$ est un fibré en disques ouverts unitaires pour une certaine métrique sur $\nu$, de sorte que l'on trouve un difféomorphisme $(\nu, M) \simeq (T, M)$ qui vaut $\mathrm{Id}_M$ sur $M$.

L'on considère alors le diagramme commutatif, dans lequel *incl* désigne les inclusions canoniques

$$\begin{tikzcd}
H^2(\nu, \nu\backslash M) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[drr, "incl^*"'] & H^2(V, V\backslash M) \arrow[dr, "incl^*"] & H^2(S^6, S^6\backslash M) \arrow[l, "incl^*"', "\simeq"] \arrow[r, "incl^*"] \arrow[d, "incl^*"'] & H^2(S^6) \arrow[dl, "incl^*"'] \\
 & & H^2(M). &
\end{tikzcd}$$

L'isomorphisme $H^2(V, V\backslash M) \xleftarrow{\simeq} H^2(S^6, S^6\backslash M)$ est l'isomorphisme d'excision. La flèche $H^2(\nu, \nu\backslash M) \to H^2(M)$ factorise donc par $H^2(S^6) = 0$, par conséquent $e(\nu) = incl^*U = 0$.

3. Le fibré $\nu \to M$ est un fibré orientable de rang 2 sur $\mathbb{R}$. Puisque $e(\nu) = 0$ il admet une section partout non-nulle. Il scinde donc comme $\nu \simeq \epsilon^1 \oplus L$, avec $L$ un fibré de rang 1 sur $\mathbb{R}$. Or $L$ est orientable puisque $\nu$ est orientable. Pour un fibré en droites réelles l'orientabilité équivaut à sa trivialité. Ainsi $L$ est trivial, donc $\nu$ aussi.

(v) $\mathbb{C}P^2$ est orientable en tant que variété complexe. L'on suppose qu'il existe un plongement $\mathbb{C}P^2 \hookrightarrow S^6$.

**Solution 1.** Par le point (iv.3) le fibré normal $\nu$ est trivial, donc $w(\nu) = 1$. Or ceci contredit le point (iii).

**Solution 2.** Nous pouvons conclure en utilisant seulement le point (iv.2). En effet, la classe de Stiefel-Whitney en degré maximal $w_2(\nu)$ est la réduction modulo 2 de la classe d'Euler. Or cette dernière est nulle par le point (iv.2), donc $w_2(\nu) = 0$. Ceci contredit le point (iii).

**Exercice 2.**

(1)

**Solution 1.** Étant donnée une inclusion de groupes de Lie compacts $K \subset H \subset G$, la projection naturelle $G/K \to G/H$ est une fibration localement triviale de fibre $H/K$. Dans le cas particulier $O(n-k) \subset O(n) \subset O(n+1)$ l'on a $V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1} = O(n+1)/O(n-k)$, $V_1\mathbb{R}^{n+1} = O(n+1)/O(n)$ et la flèche $p$ s'identifie à la projection $O(n+1)/O(n-k) \to O(n+1)/O(n)$. C'est donc une fibration localement triviale de fibre $O(n)/O(n-k) = V_k\mathbb{R}^n$.

**Solution 2.** L'on construit des trivialisations locales explicites. Pour tout $v \in S^n = V_1\mathbb{R}^{n+1}$ il existe un voisinage ouvert $v \in \mathcal{U} \subset S^n$ et une application lisse $R : \mathcal{U} \to SO(n+1)$ telle que $R_u(v) = u$, $u \in \mathcal{U}$ et $R_v = \mathrm{Id}$. (Une telle application n'est bien-sûr pas unique.) Alors $R_u(v^\perp) = u^\perp$. Fixons une isométrie $I : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\simeq} v^\perp$. Posons

$$\Phi : \mathcal{U} \times V_k\mathbb{R}^n \longrightarrow V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1},$$

$$(u, (e_1, \ldots, e_k)) \longmapsto (R_u I e_1, \ldots, R_u I e_k, u)\,.$$

L'on a clairement $p \circ \Phi = \mathrm{pr}_1$, l'application $\Phi$ réalise un difféomorphisme fibre par fibre et ceci implique le fait qu'elle réalise un difféomorphisme sur son image. C'est donc une trivialisation locale.

**Solution 3.** (présentée par C. Arnal, T. Bénard, P.-L. Blayac, T. Massoni) L'on montre que l'application $V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1} \to V_1\mathbb{R}^{n+1}$ est une submersion propre. Un théorème de Ehresmann affirme que c'est alors une fibration localement triviale.

(2) En tenant compte du fait que $V_1\mathbb{R}^{n+1} = S^n$, la suite exacte d'homotopie pour la fibration $V_k\mathbb{R}^n \overset{j}{\hookrightarrow} V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{p} V_1\mathbb{R}^{n+1}$ prend la forme

$$\ldots \longrightarrow \pi_{i+1}(S^n) \longrightarrow \pi_i(V_k\mathbb{R}^n) \xrightarrow{j_*} \pi_i(V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_i(S^n) \longrightarrow \ldots$$

Tenant compte du fait que $\pi_i(S^n) = 0$ pour $i < n$ l'on obtient que $j_*$ est un isomorphisme pour $i + 1 \leqslant n - 1$, ou encore $i \leqslant n - 2$.

(3) En utilisant le point précédent, l'on obtient pour $i \leqslant n - k - 1$ des isomorphismes

$$0 = \pi_i(S^{n-k}) = \pi_i(V_1\mathbb{R}^{n-k+1}) \xrightarrow[\simeq]{j_*} \pi_i(V_2\mathbb{R}^{n-k+2}) \xrightarrow[\simeq]{j_*} \ldots \xrightarrow[\simeq]{j_*} \pi_i(V_k\mathbb{R}^n).$$

(4)

Pour $k = 1$ l'on a $V_1\mathbb{R}^n = S^{n-1}$ et l'on sait que $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$.

Pour $k \geqslant 2$, par le point (2) l'on a une suite d'isomorphismes

$$\pi_{n-k}(V_2\mathbb{R}^{n-k+2}) \xrightarrow[\simeq]{j_*} \pi_{n-k}(V_3\mathbb{R}^{n-k+3}) \xrightarrow[\simeq]{j_*} \ldots \xrightarrow[\simeq]{j_*} \pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n).$$

Ainsi $\pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}$ si $n-k+2$ est pair, ou encore si $n-k$ est pair, et $\pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}/2$ si $n - k + 2$ est impair, ou encore si $n - k$ est impair.

(5) Étant donnée une paire $(X, A)$ et un point base $x_0$, l'ensemble sous-jacent au groupe d'homotopie $\pi_k(X, A, x_0)$ est par définition l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $f : (I^k, I^{k-1}, J^{k-1}) \to (X, A, x_0)$, où $I^{k-1} \equiv I^{k-1} \times \{0\}$ est la $k-1$-face initiale et $J^{k-1}$ est l'union des autres faces qui composent $\partial I^k$. L'application bord dans la suite exacte d'homotopie de la paire $(X, A)$ associe à $[f] \in \pi_k(X, A, x_0)$ la classe d'homotopie $[f|_{I^{k-1}}] \in \pi_{k-1}(A, x_0)$ de la restriction de $f$ à $I^{k-1}$.

De façon alternative, $\pi_k(X, A, x_0)$ peut être décrit comme étant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $f : (D^k, S^{k-1}, *) \to (X, A, x_0)$, avec $D^k$ la boule de dimension $k$, $S^{k-1} = \partial D^k$ son bord et $* \in S^{k-1}$ un point base. L'application bord dans la suite exacte d'homotopie de la paire $(X, A)$ associe à une telle classe d'homotopie $[f]$ la classe d'homotopie $[f|_{S^{k-1}}]$ de la restriction de $f$ à $S^{k-1}$.

Soit $p : E \to B$ une fibration localement triviale et $b_0 \in B$, $p_0 \in F = p^{-1}(b_0)$ des points base. L'application bord $\pi_k(B, b_0) \to \pi_{k-1}(F, p_0)$ dans la suite exacte d'homotopie de la fibration est la composée

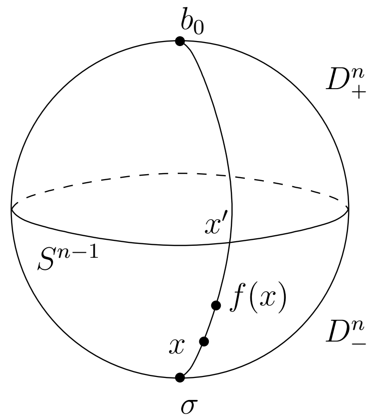
$$\pi_k(B, b_0) \xleftarrow[\simeq]{p_*} \pi_k(E, F, p_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F, p_0)$$

Autrement dit

$$\partial[f] = [\tilde{f}|_{S^{k-1}}],$$

où $f : (D^k, S^{k-1}) \to (B, b_0)$ et $\tilde{f} : (D^k, S^{k-1}, *) \to (E, F, p_0)$ est un relevé de $f$.

Après ces considérations générales revenons à notre situation concrète. L'on prend comme modèle pour $S^n$ la sphère ronde dans $\mathbb{R}^{n+1}$, avec $D^n_\pm = \{x \in S^n \ : \ \pm x_{n+1} \geqslant 0\}$. L'on fixe comme point base le pôle nord $b_0 = (0, \ldots, 0, 1) \in D^n_+$. Soit $\sigma = (0, \ldots, 0, -1) \in D^n_-$ le pôle sud. Adoptons la description suivante du générateur canonique de $\pi_n(S^n)$ : c'est la classe d'homotopie de l'application $f : D^n_- \to S^n$ qui fixe $\sigma$ et qui associe à $x \in D^n_- \backslash \{\sigma\}$ l'unique point situé sur le grand demi-cercle qui relie le pôle sud $\sigma$ au pôle nord $b_0$ et qui passe par $x$, situé à un angle égal au double de celui mesuré de $\sigma$ vers $x$.




Nous construisons un relèvement $\tilde{f}$ comme suit. L'on note $D^n_-(\frac{\pi}{4}) \subset D^n_-$ la calotte sphérique constituée des points $x$ situés à un angle $\leqslant \frac{\pi}{4}$ mesuré à partir de $\sigma$. L'on définit $\tilde{f}(x) = (f(x), p_0)$ sur $D^n_-(\frac{\pi}{4})$. Puisque $f(D^n_- \backslash \mathrm{int} D^n_-(\frac{\pi}{4})) \subset D^n_+$, pour construire le relèvement sur $D^n_- \backslash \mathrm{int} D^n_-(\frac{\pi}{4})$ nous devons prendre en compte l'application de recollement $\Phi$ : pour $x \in D^n_- \backslash \mathrm{int} D^n_-(\frac{\pi}{4})$ l'on pose $\tilde{f}(x) = (f(x), \Phi(x')p_0)$, où $x' \in S^{n-1}$ est l'unique point situé sur le grand demi-cercle qui relie $\sigma$ à $b_0$ et passe par $x$. La continuité de $\tilde{f}$ découle de la définition de la fibration $E$, ainsi que le fait que c'est un relèvement de $f$. La restriction de $\tilde{f}$ à $S^{n-1} = \partial D^n_-$ est exactement l'application $c$ décrite dans l'énoncé.

(6) Les fibrations $V_2\mathbb{R}^n \to S^{n-1}$, $(v_1, v_2) \mapsto v_2$ et $S(TS^{n-1}) \to S^{n-1}$, $(q, v) \mapsto q$ sont isomorphes par $(v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)$. En effet, la fibre de $S(TS^{n-1})$ au-dessus d'un point $q \in S^{n-1}$ est l'ensemble des vecteurs unitaires $v$ tels que $v \perp q$, ou encore l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $(q, v)$ est un 2-repère orthonormé. Les morceaux correspondants

de suites exactes d'homotopie décrits au (5) sont donc isomorphes, ce qui entraîne

$$\pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n) \simeq \pi_{n-2}(S(TS^{n-1})) = \operatorname{coker}\left(\pi_{n-1}(S^{n-1}) \to \pi_{n-2}(S^{n-2}),\ [f] \mapsto [c_{n-1}]\right),$$

où $[f]$ est un générateur de $\pi_{n-1}(S^{n-1})$. Puisque $\pi_k(S^k) \simeq \mathbb{Z}$, l'isomorphisme étant donné par le degré, la dernière flèche s'identifie à $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $1 \mapsto d$ et son conoyau est $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

(7) L'isomorphisme $j_* \circ \cdots \circ j_*$ que nous avons utilisé dans la preuve du (4) montre qu'il suffit de montrer l'énoncé pour $n - j + 1 = 2$, ou encore $j - 1 = n - 2$. Or la suite exacte

$$\pi_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_{n-2}(S^{n-2}) \xrightarrow{j_*} \pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n) \longrightarrow 0$$

montre qu'un générateur de $\pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n)$ est l'image d'un générateur de $\pi_{n-2}(S^{n-2})$, que l'on peut prendre comme étant $\mathrm{Id}_{S^{n-2}}$, par l'application $j_*$ induite par l'inclusion de la fibre $S^{n-2} = V_1\mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow V_2\mathbb{R}^n$. Ceci est exactement le contenu de l'énoncé, puisque l'application $f : S^{n-2} \to V_2\mathbb{R}^n$, $v \mapsto (v, v_1)$ est précisément l'inclusion de la fibre.

(8) Notons $w_j^{obstr}(\eta)$ la $j$-ème classe de Stiefel-Whitney définie pour un fibré $\eta$ de rang $n$ comme réduction modulo 2 de la classe primaire d'obstruction à l'existence de $n-j+1$ sections linéairement indépendantes en chaque point sur le $j$-squelette.

En suivant la preuve du Théorème 4.28 du polycopié du cours, il suffit de montrer que, pour tout $n$, il existe un fibré $\eta$ de rang $n$ sur $\mathbb{R}$ tel que $w_j^{obstr}(\eta) \neq 0$. L'on considère le fibré

$$\eta^n = \xi^j \oplus \epsilon^{n-j} \to \mathbb{R}P^j,$$

où $\epsilon^{n-j}$ est le fibré trivial de rang $n-j$ et $\xi^j \to \mathbb{R}P^j$ est le fibré tautologique des $j$-plans utilisé dans la preuve du Théorème 4.28.

L'argument donné dans la preuve du Théorème 4.28 pour $j = n$ montre que la classe primaire d'obstruction à l'existence d'*une* section partout non-nulle de $\xi^j$ sur $\mathbb{R}P^j$ est non-triviale. Celle-ci coïncide, par la description géométrique du générateur de $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}\mathbb{R}^n)$ donnée au point (7), avec la classe primaire d'obstruction à l'existence de $n-j+1$ sections linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}P^j$. Cette dernière est donc non-nulle.