

Notes de cours de Topologie algébrique

FIBRÉS VECTORIELS ET CLASSES CARACTÉRISTIQUES

Alexandru OANCEA

Université Pierre et Marie Curie

Master de mathématiques fondamentales, 2^{ème} année

14 novembre 2016

Page web du cours :

[https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/
2016-M2-TOP0-ALG/topo-alg-2016.html](https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-TOP0-ALG/topo-alg-2016.html)

PRÉREQUIS

Les applications les plus éclatantes des fibrés vectoriels concernent les variétés différentiables. Alors même que ce cours n'est pas un cours de topologie différentielle, il est fortement conseillé d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de base.

Si tel n'est pas le cas, vous pouvez par exemple lire les premiers chapitres du livre

J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Univ. Press, 1997 (1965).

Pour un aperçu plus large, voir par exemple les livres suivants qui traitent aussi la cohomologie de De Rham

J. LAFONTAINE, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 2010.

F. PAULIN, *Géométrie différentielle élémentaire*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2006-2007, disponibles en ligne :

http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf

Une autre référence possible sont les notes de cours

A. OANCEA, *Notes de cours de Géométrie différentielle*, niveau M1, UPMC, 2014-2016, disponibles en ligne

<http://www.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-GEO-DIFF/geo-diff-2016.html>

BIBLIOGRAPHIE

- (1) J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, 1974.
- (2) N. Steenrod, *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, 1999 (1951).
- (3) G. Bredon, *Topology and geometry*, Springer, GTM, 1994.

TABLE DES MATIÈRES

Prérequis	2
Bibliographie	3
1. Motivation pour l'étude des fibrés vectoriels	5
1.1. Définition d'un fibré vectoriel	5
1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels	6

1. MOTIVATION POUR L'ÉTUDE DES FIBRÉS VECTORIELS

1.1. Définition d'un fibré vectoriel. Un fibré vectoriel de rang k sur une variété B est la donnée d'une famille lisse d'espaces vectoriels de dimension k indexée par les points de B et qui est localement constante sur B ("localement triviale"). L'on travaillera avec des espaces vectoriels réels ou complexes, auquel cas on précisera parfois "fibré vectoriel réel" ou "fibré vectoriel complexe". L'on utilisera la notation \mathbb{K} pour désigner indistinctement les corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . La définition formelle est la suivante :

Définition 1.1. *Un fibré vectoriel de rang r sur une base B est la donnée d'une variété E munie d'une submersion $\pi : E \rightarrow B$ telle que la condition suivante de trivialité locale soit satisfaite :*

la base B admet un recouvrement ouvert (U_i) tel qu'il existe des difféomorphismes $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^r$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{K}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_i \end{array}$$

et tels que, pour tous i, j , le difféomorphisme

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r,$$

est de la forme

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, v) = (p, \Phi_{ij}(p)v),$$

avec

$$\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$$

lisse.

Dans la définition précédente, l'application $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ est nécessairement de la forme $(p, v) \mapsto (p, \Phi_{ij}(p)v)$, avec $\Phi_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^r$ lisse. L'on demande à ce que cette dernière application soit un isomorphisme linéaire à $p \in U_i \cap U_j$ fixé et on la note $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$.

Terminologie. E s'appelle *espace total du fibré*; B s'appelle *base du fibré*; π s'appelle *projection*; $E_b := \pi^{-1}(b)$, $b \in B$ s'appelle *la fibre au-dessus du point b* ; les Φ_i s'appellent *trivialisations locales*; les Φ_{ij} s'appellent *applications de changement de trivialisation*.

Conséquences de la définition :

- (i) chaque fibre E_b , $b \in B$ possède une structure d'espace vectoriel de dimension r défini sur \mathbb{K} . En effet, l'on transporte la structure d'espace vectoriel de \mathbb{K}^r via une trivialisation locale Φ_i au voisinage de b . Le fait que les applications de changement de

trivialisations soient des isomorphismes linéaires assure que cette structure d'espace vectoriel est indépendante du choix de Φ_i .

Par contre, il est important de noter que la fibre E_b ne possède pas de base canonique. Si c'était le cas, tous les fibrés seraient isomorphes au fibré trivial $B \times \mathbb{K}^r$. Ceci n'est certainement pas vrai, comme nous allons le voir tout de suite.

(ii) la collection des Φ_{ij} vérifie la "condition de 1-cocycle" :

$$\forall i, j, k, \quad \Phi_{ij}\Phi_{jk} = \Phi_{ik}, \quad \Phi_{ii} = \text{Id}.$$

Réciproquement, la donnée d'un recouvrement ouvert (U_i) de B et d'un 1-cocycle $\{\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K}) : i, j\}$ définit un fibré vectoriel de rang r sur \mathbb{K} dont les applications de changement de trivialisations sont données par ce même cocycle. De façon explicite l'on a

$$E = \bigsqcup_i U_i \times \mathbb{K}^r / \sim,$$

avec, pour $(p, v) \in U_i \times \mathbb{K}^r$ et $(q, w) \in U_j \times \mathbb{K}^r$,

$$(p, v) \sim (q, w) \quad \Leftrightarrow \quad p = q \quad \text{et} \quad v = \Phi_{ij}(p)w.$$

Remarque. Étant donnée une base B qui est une variété complexe, un *fibré holomorphe au-dessus de B* est un fibré complexe qui admet une structure de variété complexe pour laquelle les applications de trivialisations sont des biholomorphismes. De façon équivalente, les applications $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$ qui constituent le cocycle de définition sont des applications holomorphes.

Attention : en règle générale, un fibré complexe sur une base B n'a rien d'holomorphe ! (par ailleurs, la base peut très bien être de dimension impaire).

1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels.

(I) *Le formalisme des fibrés vectoriels est le formalisme adapté pour décrire des objets de nature infinitésimale définis sur une variété.* Ou encore : tout fibré vectoriel peut être interprété comme la donnée d'informations supplémentaires de nature linéaire, c'est-à-dire infinitésimale, le long d'une variété.

Exemples : TB , T^*B , $\Lambda^k T^*B$.

Vous avez déjà rencontré les champs de vecteurs, les 1-formes différentielles, ou encore les k -formes différentielles. Tous ces objets sont clairement de nature infinitésimale et ils jouent un rôle important dans l'étude des variétés. Ce sont en particulier autant d'exemples de "sections de fibrés vectoriels".

Définition 1.2. Une section d'un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} B$ est une application lisse $s : B \rightarrow E$ telle que $s(b) \in E_b$ pour tout point $b \in B$. De façon équivalente,

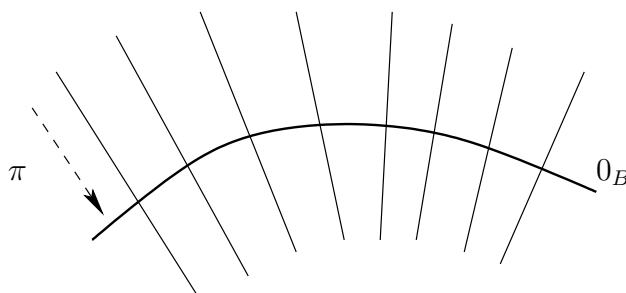
$$\pi \circ s = \text{Id}_B.$$

Les champs de vecteurs sont les sections de TB . Les 1-formes différentielles sont les sections de T^*B . Les k -formes différentielles sont les sections de $\Lambda^k T^*B$.

L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel possède une structure naturelle d'espace vectoriel : l'addition et la multiplication par des scalaires sont définies ponctuellement. On le note

$$\Gamma(E), \text{ ou } \Gamma(B, E).$$

Mieux même, l'espace $\Gamma(E)$ est un module sur l'anneau $\mathcal{F}(B)$ des fonctions lisses sur B . Le zéro de l'espace $\Gamma(E)$ est la *section nulle*, notée souvent 0_B , qui prend la valeur $0 \in E_b$ en tout point de $b \in B$. Celle-ci définit un plongement canonique de B dans l'espace total du fibré E et justifie le dessin schématique par lequel on représente souvent un fibré vectoriel.



Le fait que les sections puissent être additionnées ponctuellement et aussi multipliées par des fonctions nous mène vers le point de vue suivant.

(II) Les sections de fibrés peuvent souvent être interprétées comme des généralisations des fonctions définies sur la base B .

L'exemple suivant est emblématique. Considérons l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ et le *fibré tautologique*

$$\mathcal{O}(-1) = \{(d, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} : v \in d\} \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}.$$

L'on vérifie que c'est un fibré holomorphe de rang 1 sur $\mathbb{C}P^n$ dont la projection est donnée par $(d, v) \mapsto d$.

Étant donné un \mathbb{K} -espace vectoriel V l'on note $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ son dual. Définissons aussi le *fibré hyperplan*

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^* = \{(d, \alpha) : \alpha \in d^*\}.$$

Posons aussi

$$\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k}, \quad \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes k}, \quad k \geq 1$$

et

$$\mathcal{O}(0) = \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}.$$

Exercice. Montrer que l'espace des sections *holomorphes* de $\mathcal{O}(-k)$, $k \geq 1$ est réduit à zéro. Montrer que l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(k)$, $k \geq 1$ s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré k à coefficients complexes en $n + 1$ variables. Montrer que l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(0)$ est de dimension 1 (toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}P^n$ est constante).

Autrement dit, alors que $\mathbb{C}P^n$ n'admet que très peu de fonctions holomorphes (les fonctions constantes), certains fibrés holomorphes en droites sur $\mathbb{C}P^n$ admettent de nombreuses sections.

Exercice. Estimer la dimension de l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(k)$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

(III) *Déformations infinitésimales.*

Dans l'exemple précédent nous avons implicitement utilisé les puissances tensorielles d'un fibré en droites. De façon générale, les opérations canoniques sur les espaces vectoriels et les isomorphismes canoniques entre espaces vectoriels peuvent être mis en famille et donc passent aux fibrés. Ici, par "canonique" l'on entend "qui ne fait pas intervenir de choix de base".

Exemples : étant donnés deux fibrés E et F sur la même base, l'on peut définir leur somme directe $E \oplus F$, leur produit tensoriel $E \otimes F$, leurs duaux E^* , F^* , le fibré des homomorphismes $\text{Hom}(E, F)$, canoniquement isomorphe à $E^* \otimes F$. Étant donné un sous-fibré $F \subset E$, l'on peut définir le fibré quotient E/F etc.

Exercice. Décrire la présentation des fibrés ci-dessus par des cocycles, étant données des cocycles de définition pour E et F .

Définition 1.3. *Étant donné un fibré E , un sous-fibré de rang ℓ est une sous-variété $F \subset E$ telle que, pour tout $b \in B$, $F_b \subset E_b$ est un sous-espace vectoriel de rang ℓ .*

Exercice. Montrer que F possède alors une structure naturelle de fibré vectoriel.

Le notion de fibré quotient apparaît très souvent en géométrie, notamment à travers la construction suivante.

Définition 1.4. *Soit $M \subset N$ une sous-variété. Le fibré normal à M dans N est par définition*

$$\nu_N M = TN|_M / TM.$$

Ce fibré joue un rôle important pour comprendre la façon dont M est plongée dans N à travers le théorème suivant.

Théorème 1.5 (Théorème du voisinage tubulaire, voir par exemple Bredon II.11, en particulier 11.4 et 11.14). *Soit $M \subset N$ une sous-variété. Un voisinage de M dans N est difféomorphe à un voisinage de la section nulle dans $\nu_N M$. Le difféomorphisme peut être choisi de façon à ce qu'il coïncide sur M avec le plongement donné par la section nulle.* \square

Voici deux exemples significatifs. L'on considère les deux plongements suivantes du cercle S^1 .

(a) $S^1 \subset S^2$, le plongement du cercle en tant qu'équateur. Alors $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ est le fibré trivial. Un voisinage de S^1 dans S^2 est difféomorphe à un cylindre au-dessus de S^1 .

(b) $S^1 \simeq \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$, le plongement du cercle en tant que droite à l'infini dans le plan projectif réel. L'on vérifie que l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur la paire (S^2, S^1) , dont le quotient est la paire $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1)$, détermine par linéarisation une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ dont l'élément non-trivial agit par l'application antipodale sur la base et par $v \mapsto -v$ sur la fibre. Le quotient est le fibré $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$. L'on vérifie que ce dernier est un fibré en droites réelles qui n'est pas trivial puisque toute section possède au moins un zéro. On l'appelle aussi *bande de Möbius*.

Exercice. Montrer que le fibré $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$ n'est pas trivial.

L'importance pratique du théorème de voisinage tubulaire est que, pour comprendre les "petites" déformations d'une sous-variété M à l'intérieur d'une variété N , il suffit de comprendre les déformations de la section nulle dans $\nu_N M$.

L'on a tout de suite une indication sur l'importance du problème de classification des fibrés de rang r donné sur une variété M donnée : il fournit en particulier la réponse à la question de comprendre quels sont les voisinages possibles des plongements de codimension r de M .

(IV) *Le langage des fibrés vectoriels est incontournable pour étudier les linéarisations d'équations d'origine géométrique.* Soient X, Y deux variétés et notons $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications lisses $f : X \rightarrow Y$. L'on pense à $\mathcal{F}(X, Y)$ comme étant une variété de dimension infinie (modélisée sur un espace de Fréchet). Un candidat raisonnable pour l'espace tangent à $\mathcal{F}(X, Y)$ en un point f est

$$T_f \mathcal{F}(X, Y) = \Gamma(f^*TY),$$

avec f^*TY le fibré tiré-en-arrière que nous définissons ci-dessous. En effet, en interprétant les vecteurs tangents à $\mathcal{F}(X, Y)$ au point f comme des jets d'ordre 1 en 0 de courbes $f_t, t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\epsilon > 0$ avec $f_0 = f$, l'on

identifie un tel vecteur tangent avec la famille de vecteurs tangents

$$\left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x) : x \in X \right\}.$$

Chaque vecteur tangent $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x)$ appartient à $T_{f(x)}Y$, et il s'ensuit que la famille toute entière peut être regardée comme une section d'un fibré sur X dont la fibre en un point $x \in X$ est $T_{f(x)}TY$. Ceci est exactement la définition des sections du fibré tiré-en-arrière f^*TY .

Définition 1.6. Soit $F \xrightarrow{\pi} Y$ un fibré et $f : X \rightarrow Y$ une application lisse. L'on définit le fibré tiré-en-arrière par f comme

$$f^*F = \{(x, v) : x \in X, v \in F_{f(x)}\}.$$

Exercice. Montrer que f^*F est bien un fibré localement trivial sur X . La projection $f^*F \rightarrow X$ associe à (x, v) le point x . Montrer que l'on a un diagramme commutatif

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} f^*F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

dans lequel la flèche horizontale du haut est l'identité sur chaque fibre. Montrer que f^*F muni de cette flèche $f^*F \rightarrow F$ est un objet final dans la catégorie des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

donnés par les morphismes de fibrés $E \rightarrow F$ qui relèvent f . On dit aussi que (1.1) est un *carré cartésien*. Le fibré tiré-en-arrière peut être interprété comme un produit fibré (!), ou encore comme une "limite" au sens algébrique du terme.

Revenons maintenant aux équations de nature géométrique. Une telle équation peut souvent être mise sous la forme

$$\mathcal{S}(f) = 0,$$

avec \mathcal{S} une section d'un certain fibré

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}(X, Y).$$

Typiquement la fibre \mathcal{E}_f est de dimension infinie. L'on s'intéresse à la linéarisation

$$d\mathcal{S}(f) : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow T_{(f,0)}\mathcal{E}$$

en un zéro de \mathcal{S} , c'est-à-dire en un point f tel que $\mathcal{S}(f) = (f, 0)$.

Exercice. Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel. Montrer que, pour tout $b \in B$, l'on a un isomorphisme canonique

$$T_{(b,0)}E \simeq T_bB \oplus E_b.$$

Soit $s : B \rightarrow E$ une section lisse et $b \in B$ un zéro de s , à savoir un point tel que $s(b) = (b, 0)$. Montrer que, lue à travers l'isomorphisme précédent, la différentielle de s au point b agit comme

$$ds(b) = (\text{Id}_{T_bB}, ds^{\text{vert}}(b)) : T_bB \rightarrow T_bB \oplus E_b,$$

avec

$$ds^{\text{vert}}(b) : T_bB \rightarrow E_b$$

une application linéaire.

L'on dit que s est transverse à la section nulle si $ds^{\text{vert}} : T_bB \rightarrow E_b$ est surjective pour tout zéro b de s . Montrer que cette condition est équivalente à

$$T_bB + T_{(b,0)}\text{im}(s) = T_{(b,0)}E.$$

Exercice 1. Soit M une variété et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Montrer que la section $df \in \Gamma(T^*M)$ est transverse à la section nulle si et seulement si f est une fonction de Morse.

Revenons à nouveau au contexte fonctionnel. Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ un zéro de \mathcal{S} . La différentielle $d\mathcal{S}(f)$ est donc uniquement déterminée par

$$d\mathcal{S}^{\text{vert}} : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}_f.$$

En pratique la fibre \mathcal{E}_f est elle-même décrite comme espace de sections d'un certain fibré vectoriel et l'opérateur $d\mathcal{S}^{\text{vert}}(f)$ est un opérateur linéaire et continu par rapport à un choix approprié de normes.

Exemple. Soit (Σ, j) une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1, pour laquelle on note la structure complexe par j . Ainsi $j \in \Gamma(\text{End}(T\Sigma))$, $j^2 = -\text{Id}$. Soit (Y, J) une variété complexe, pour laquelle on note J la structure complexe, de sorte que $J \in \Gamma(\text{End}(TY))$, $J^2 = -\text{Id}$. Considérons le problème de trouver des applications holomorphes parmi les applications lisses

$$f : \Sigma \rightarrow Y.$$

Le fait que la différentielle df d'une telle application soit \mathbb{C} -linéaire en tout point, c'est-à-dire qu'elle vérifie $df \circ j = J \circ df$, est équivalent à l'annulation de l'expression

$$\bar{\partial}f := df + J \circ df \circ j$$

en tout point de Σ . Notons que $\bar{\partial}f \in \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY))$, le fibré des homomorphismes \mathbb{R} -linéaires et \mathbb{C} -anti-linéaires de $T\Sigma$ dans f^*TY , encore noté $\Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY)$. L'équation des courbes holomorphes définies sur Σ à valeurs dans Y est donc

$$\bar{\partial}f = 0,$$

avec $\bar{\partial}$ interprétée comme section d'un fibré (de rang infini) \mathcal{E} au-dessus de $\mathcal{F}(\Sigma, Y)$ dont la fibre est donnée par

$$\mathcal{E}_f = \Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY).$$

La linéarisation de $\bar{\partial}$ en un zéro f est donc déterminée par l'opérateur

$$d\bar{\partial}^{vert}(f) : \Gamma(f^*TY) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY)).$$

L'on peut bien évidemment expliciter cet opérateur, par exemple en coordonnées locales. Il se trouve qu'il est elliptique et donc de Fredholm lorsqu'on le fait agir entre des complétions de Sobolev appropriées. Ses propriétés déterminent les propriétés locales de l'espace des courbes holomorphes $\Sigma \rightarrow Y$.