

# Notes de cours de Topologie algébrique

## FIBRÉS VECTORIELS ET CLASSES CARACTÉRISTIQUES

Alexandru OANCEA

Université Pierre et Marie Curie

Master de mathématiques fondamentales, 2<sup>ème</sup> année

6 décembre 2016

Page web du cours :

[https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/  
2016-M2-TOPO-ALG/topo-alg-2016.html](https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-TOPO-ALG/topo-alg-2016.html)

## PRÉREQUIS

Les applications les plus éclatantes des fibrés vectoriels concernent les variétés différentiables. Alors même que ce cours n'est pas un cours de topologie différentielle, il est fortement conseillé d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de base.

Si tel n'est pas le cas, vous pouvez par exemple lire les premiers chapitres du livre

J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Univ. Press, 1997 (1965).

Pour un aperçu plus large, voir par exemple les livres suivants qui traitent aussi la cohomologie de De Rham

J. LAFONTAINE, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 2010.

F. PAULIN, *Géométrie différentielle élémentaire*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2006-2007, disponibles en ligne :

[http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours\\_geodiff.pdf](http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf)

Une autre référence possible sont les notes de cours

A. OANCEA, *Notes de cours de Géométrie différentielle*, niveau M1, UPMC, 2014-2016, disponibles en ligne

<http://www.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-GEO-DIFF/geo-diff-2016.html>

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, 1974.
- (2) N. Steenrod, *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, 1999 (1951).
- (3) G. Bredon, *Topology and geometry*, Springer, GTM 139, 1994.
- (4) S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer, 2004 (1987).
- (5) M.W. Hirsch, *Differential topology*, Springer, GTM 33, 1976.
- (6) A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
- (7) R. Bott, L.W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer, GTM 82, 1982.
- (8) D. Husemoller, *Fibre bundles*, Springer, GTM 20, 1994 (1966).

## TABLE DES MATIÈRES

Prérequis	2
Bibliographie	3
Programme du cours novembre-décembre 2016	5
1. Motivation pour l'étude des fibrés vectoriels	6
1.1. Définition d'un fibré vectoriel	6
1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels	7
2. Classification des fibrés. Homotopie	14
2.1. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères	14
2.2. Notions de topologie différentielle	20
2.3. Fibrés vectoriels et homotopie	31
2.4. Groupes d'homotopie	40
3. Classes caractéristiques	48
3.1. Le point de vue axiomatique	48
Annexe A. Connexions et distributions horizontales	57

## PROGRAMME DU COURS NOVEMBRE-DÉCEMBRE 2016

Cours 1. Motivations pour l'étude des fibrés vectoriels.

Cours 2. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères. Connexions.

Cours 3. Approximation de fonctions. Homotopie. Transversalité.

Cours 4. Théorème de classification des fibrés de rang et base donnés.

Cours 5. Groupes d'homotopie.

Cours 6. Degré d'une application différentiable.  $\deg : \pi_n(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ .  
Rappels d'homologie et cohomologie singulière et cellulaire.

Cours 7. Point de vue axiomatique sur les classes de Stiefel-Whitney et Chern.

Cours 8. CW-complexes. Théorème de Hurewicz. Théorie de l'obstruction I : le cocycle d'obstruction.

Cours  $8\frac{1}{2}$  : Théorème de Leray-Hirsch. Calcul de la cohomologie de Grassmanniennes.

## 1. MOTIVATION POUR L'ÉTUDE DES FIBRÉS VECTORIELS

**1.1. Définition d'un fibré vectoriel.** Un fibré vectoriel de rang  $k$  sur une variété  $B$  est la donnée d'une famille lisse d'espaces vectoriels de dimension  $k$  indexée par les points de  $B$  et qui est localement constante sur  $B$  ("localement triviale"). L'on travaillera avec des espaces vectoriels réels ou complexes, auquel cas on précisera parfois "fibré vectoriel réel" ou "fibré vectoriel complexe". L'on utilisera la notation  $\mathbb{K}$  pour désigner indistinctement les corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La définition formelle est la suivante :

**Définition 1.1.** *Un fibré vectoriel de rang  $r$  sur une base  $B$  est la donnée d'une variété  $E$  munie d'une submersion  $\pi : E \rightarrow B$  telle que la condition suivante de trivialité locale soit satisfaite :*

*la base  $B$  admet un recouvrement ouvert  $(U_i)$  tel qu'il existe des difféomorphismes  $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^r$  qui font commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{K}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_i \end{array}$$

*et tels que, pour tous  $i, j$ , le difféomorphisme*

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r,$$

*est de la forme*

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, v) = (p, \Phi_{ij}(p)v),$$

*avec*

$$\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$$

*lisse.*

Dans la définition précédente, l'application  $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$  est nécessairement de la forme  $(p, v) \mapsto (p, \Phi_{ij}(p)v)$ , avec  $\Phi_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^r$  lisse. L'on demande à ce que cette dernière application soit un isomorphisme linéaire à  $p \in U_i \cap U_j$  fixé et on la note  $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$ .

**Terminologie.**  $E$  s'appelle *espace total du fibré*;  $B$  s'appelle *base du fibré*;  $\pi$  s'appelle *projection*;  $E_b := \pi^{-1}(b)$ ,  $b \in B$  s'appelle *la fibre au-dessus du point  $b$* ; les  $\Phi_i$  s'appellent *trivialisations locales*; les  $\Phi_{ij}$  s'appellent *applications de changement de trivialisation*. L'on note souvent un point de l'espace total par  $(b, v)$ , avec la signification  $v \in E_b$ .

Conséquences de la définition :

- (i) chaque fibre  $E_b$ ,  $b \in B$  possède une structure d'espace vectoriel de dimension  $r$  défini sur  $\mathbb{K}$ . En effet, l'on transporte la structure d'espace vectoriel de  $\mathbb{K}^r$  via une trivialisation locale  $\Phi_i$  au voisinage de  $b$ . Le fait que les applications de changement de

trivialisation soient des isomorphismes linéaires assure que cette structure d'espace vectoriel est indépendante du choix de  $\Phi_i$ .

Par contre, il est important de noter que la fibre  $E_b$  ne possède pas de base canonique. Si c'était le cas, tous les fibrés seraient isomorphes au fibré trivial  $B \times \mathbb{K}^r$ . Ceci n'est certainement pas vrai, comme nous allons le voir tout de suite.

(ii) la collection des  $\Phi_{ij}$  vérifie la “condition de 1-cocycle” :

$$\forall i, j, k, \quad \Phi_{ij}\Phi_{jk} = \Phi_{ik}, \quad \Phi_{ii} = \text{Id}.$$

Réciproquement, la donnée d'un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $B$  et d'un 1-cocycle  $\{\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K}) : i, j\}$  définit un fibré vectoriel de rang  $r$  sur  $\mathbb{K}$  dont les applications de changement de trivialisation sont données par ce même cocycle. De façon explicite l'on a

$$E = \bigsqcup_i U_i \times \mathbb{K}^r / \sim,$$

avec, pour  $(p, v) \in U_i \times \mathbb{K}^r$  et  $(q, w) \in U_j \times \mathbb{K}^r$ ,

$$(p, v) \sim (q, w) \quad \Leftrightarrow \quad p = q \quad \text{et} \quad v = \Phi_{ij}(p)w.$$

**Remarque.** Étant donnée une base  $B$  qui est une variété complexe, un *fibré holomorphe au-dessus de  $B$*  est un fibré complexe qui admet une structure de variété complexe pour laquelle les applications de trivialisation sont des biholomorphismes. De façon équivalente, les applications  $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$  qui constituent le cocycle de définition sont des applications holomorphes.

Attention : en règle générale, un fibré complexe sur une base  $B$  n'a rien d'holomorphe ! (par ailleurs, la base peut très bien être de dimension impaire).

## 1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels.

(I) *Le formalisme des fibrés vectoriels est le formalisme adapté pour décrire des objets de nature infinitésimale définis sur une variété.* Ou encore : tout fibré vectoriel peut être interprété comme la donnée d'informations supplémentaires de nature linéaire, c'est-à-dire infinitésimale, le long d'une variété.

Exemples :  $TB$ ,  $T^*B$ ,  $\Lambda^k T^*B$ .

Vous avez déjà rencontré les champs de vecteurs, les 1-formes différentielles, ou encore les  $k$ -formes différentielles. Tous ces objets sont clairement de nature infinitésimale et ils jouent un rôle important dans l'étude des variétés. Ce sont en particulier autant d'exemples de “sections de fibrés vectoriels”.

**Définition 1.2.** Une section d'un fibré vectoriel  $E \xrightarrow{\pi} B$  est une application lisse  $s : B \rightarrow E$  telle que  $s(b) \in E_b$  pour tout point  $b \in B$ . De façon équivalente,

$$\pi \circ s = \text{Id}_B.$$

Les champs de vecteurs sont les sections de  $TB$ . Les 1-formes différentielles sont les sections de  $T^*B$ . Les  $k$ -formes différentielles sont les sections de  $\Lambda^k T^*B$ .

L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel possède une structure naturelle d'espace vectoriel : l'addition et la multiplication par des scalaires sont définies ponctuellement. On le note

$$\Gamma(E), \text{ ou } \Gamma(B, E).$$

Mieux même, l'espace  $\Gamma(E)$  est un module sur l'anneau  $\mathcal{F}(B)$  des fonctions lisses sur  $B$ . Le zéro de l'espace  $\Gamma(E)$  est la *section nulle*, notée souvent  $0_B$ , qui prend la valeur  $0 \in E_b$  en tout point de  $b \in B$ . Celle-ci définit un plongement canonique de  $B$  dans l'espace total du fibré  $E$  et justifie le dessin schématique par lequel on représente souvent un fibré vectoriel.

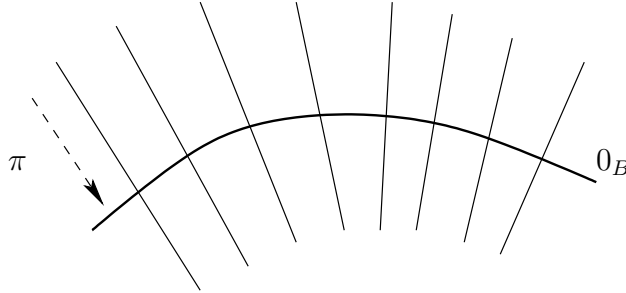


FIGURE 1

Le fait que les sections puissent être additionnées ponctuellement et aussi multipliées par des fonctions nous mène vers le point de vue suivant.

(II) *Les sections de fibrés peuvent souvent être interprétées comme des généralisations des fonctions définies sur la base  $B$ .*

L'exemple suivant est emblématique. Considérons l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$  et le *fibré tautologique*

$$\mathcal{O}(-1) = \{(d, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} : v \in d\} \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}.$$

L'on vérifie que c'est un fibré holomorphe de rang 1 sur  $\mathbb{C}P^n$  dont la projection est donnée par  $(d, v) \mapsto d$ .

Étant donné un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V$  l'on note  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$  son dual. Définissons aussi le *fibré hyperplan*

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^* = \{(d, \alpha) : \alpha \in d^*\}.$$



Posons aussi

$$\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k}, \quad \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes k}, \quad k \geq 1$$

et

$$\mathcal{O}(0) = \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}.$$

**Exercice.** Montrer que l'espace des sections *holomorphes* de  $\mathcal{O}(-k)$ ,  $k \geq 1$  est réduit à zéro. Montrer que l'espace des sections holomorphes de  $\mathcal{O}(k)$ ,  $k \geq 1$  s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré  $k$  à coefficients complexes en  $n + 1$  variables. Montrer que l'espace des sections holomorphes de  $\mathcal{O}(0)$  est de dimension 1 (toute fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}P^n$  est constante).

Autrement dit, alors que  $\mathbb{C}P^n$  n'admet que très peu de fonctions holomorphes (les fonctions constantes), certains fibrés holomorphes en droites sur  $\mathbb{C}P^n$  admettent de nombreuses sections.

**Exercice.** Estimer la dimension de l'espace des sections holomorphes de  $\mathcal{O}(k)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

(III) *Déformations infinitésimales.*

Dans l'exemple précédent nous avons implicitement utilisé les puissances tensorielles d'un fibré en droites. De façon générale, les opérations canoniques sur les espaces vectoriels et les isomorphismes canoniques entre espaces vectoriels peuvent être mis en famille et donc passent aux fibrés. Ici, par "canonique" l'on entend "qui ne fait pas intervenir de choix de base".

Exemples : étant donnés deux fibrés  $E$  et  $F$  sur la même base, l'on peut définir leur somme directe  $E \oplus F$ , leur produit tensoriel  $E \otimes F$ , leurs duaux  $E^*$ ,  $F^*$ , le fibré des homomorphismes  $\text{Hom}(E, F)$ , canoniquement isomorphe à  $E^* \otimes F$ . Étant donné un sous-fibré  $F \subset E$ , l'on peut définir le fibré quotient  $E/F$  etc.

**Exercice.** Décrire la présentation des fibrés ci-dessus par des cocycles, étant données des cocycles de définition pour  $E$  et  $F$ .

**Définition 1.3.** *Étant donné un fibré  $E$ , un sous-fibré de rang  $\ell$  est une sous-variété  $F \subset E$  telle que, pour tout  $b \in B$ ,  $F_b \subset E_b$  est un sous-espace vectoriel de rang  $\ell$ .*

**Exercice.** Montrer que  $F$  possède alors une structure naturelle de fibré vectoriel.

Le notion de fibré quotient apparaît très souvent en géométrie, notamment à travers la construction suivante.

**Définition 1.4.** *Soit  $M \subset N$  une sous-variété. Le fibré normal à  $M$  dans  $N$  est par définition*

$$\nu_N M = TN|_M / TM.$$

Ce fibré joue un rôle important pour comprendre la façon dont  $M$  est plongée dans  $N$  à travers le théorème suivant.

**Théorème 1.5** (Théorème du voisinage tubulaire, voir par exemple Bredon II.11, en particulier 11.4 et 11.14). *Soit  $M \subset N$  une sous-variété. Un voisinage de  $M$  dans  $N$  est difféomorphe à un voisinage de la section nulle dans  $\nu_N M$ . Le difféomorphisme peut être choisi de façon à ce qu'il coïncide sur  $M$  avec le plongement donné par la section nulle.*  $\square$

Voici deux exemples significatifs. L'on considère les deux plongements suivantes du cercle  $S^1$ .

(a)  $S^1 \subset S^2$ , le plongement du cercle en tant qu'équateur. Alors  $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$  est le fibré trivial. Un voisinage de  $S^1$  dans  $S^2$  est difféomorphe à un cylindre au-dessus de  $S^1$ .

(b)  $S^1 \simeq \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$ , le plongement du cercle en tant que droite à l'infini dans le plan projectif réel. L'on vérifie que l'action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur la paire  $(S^2, S^1)$ , dont le quotient est la paire  $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1)$ , détermine par linéarisation une action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$  dont l'élément non-trivial agit par l'application antipodale sur la base et par  $v \mapsto -v$  sur la fibre. Le quotient est le fibré  $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$ . L'on vérifie que ce dernier est un fibré en droites réelles qui n'est pas trivial puisque toute section possède au moins un zéro. On l'appelle aussi *bande de Möbius*.

**Exercice.** Montrer que le fibré  $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$  n'est pas trivial.

L'importance pratique du théorème de voisinage tubulaire est que, pour comprendre les "petites" déformations d'une sous-variété  $M$  à l'intérieur d'une variété  $N$ , il suffit de comprendre les déformations de la section nulle dans  $\nu_N M$ .

L'on a tout de suite une indication sur l'importance du problème de classification des fibrés de rang  $r$  donné sur une variété  $M$  donnée : il fournit en particulier la réponse à la question de comprendre quels sont les voisinages possibles des plongements de codimension  $r$  de  $M$ .

(IV) *Le langage des fibrés vectoriels est incontournable pour étudier les linéarisations d'équations d'origine géométrique.* Soient  $X, Y$  deux variétés et notons  $\mathcal{F}(X, Y)$  l'ensemble des applications lisses  $f : X \rightarrow Y$ . L'on pense à  $\mathcal{F}(X, Y)$  comme étant une variété de dimension infinie (modélisée sur un espace de Fréchet). Un candidat raisonnable pour l'espace tangent à  $\mathcal{F}(X, Y)$  en un point  $f$  est

$$T_f \mathcal{F}(X, Y) = \Gamma(f^*TY),$$

avec  $f^*TY$  le fibré tiré-en-arrière que nous définissons ci-dessous. En effet, en interprétant les vecteurs tangents à  $\mathcal{F}(X, Y)$  au point  $f$  comme des jets d'ordre 1 en 0 de courbes  $f_t, t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ ,  $\epsilon > 0$  avec  $f_0 = f$ , l'on

identifie un tel vecteur tangent avec la famille de vecteurs tangents

$$\left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x) : x \in X \right\}.$$

Chaque vecteur tangent  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x)$  appartient à  $T_{f(x)}Y$ , et il s'ensuit que la famille toute entière peut être regardée comme une section d'un fibré sur  $X$  dont la fibre en un point  $x \in X$  est  $T_{f(x)}TY$ . Ceci est exactement la définition des sections du fibré tiré-en-arrière  $f^*TY$ .

**Définition 1.6.** Soit  $F \xrightarrow{\pi} Y$  un fibré et  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse. L'on définit le fibré tiré-en-arrière par  $f$  comme

$$f^*F = \{(x, v) : x \in X, v \in F_{f(x)}\}.$$

**Exercice.** Montrer que  $f^*F$  est bien un fibré localement trivial sur  $X$ . La projection  $f^*F \rightarrow X$  associe à  $(x, v)$  le point  $x$ . Montrer que l'on a un diagramme commutatif

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} f^*F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

dans lequel la flèche horizontale du haut est l'identité sur chaque fibre. Montrer que  $f^*F$  muni de cette flèche  $f^*F \rightarrow F$  est un objet final dans la catégorie des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

donnés par les morphismes de fibrés  $E \rightarrow F$  qui relèvent  $f$ . On dit aussi que (1.1) est un *carré cartésien*. Le fibré tiré-en-arrière peut être interprété comme un produit fibré (!), ou encore comme une "limite" au sens algébrique du terme.

Revenons maintenant aux équations de nature géométrique. Une telle équation peut souvent être mise sous la forme

$$\mathcal{S}(f) = 0,$$

avec  $\mathcal{S}$  une section d'un certain fibré

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}(X, Y).$$

Typiquement la fibre  $\mathcal{E}_f$  est de dimension infinie. L'on s'intéresse à la linéarisation

$$d\mathcal{S}(f) : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow T_{(f,0)}\mathcal{E}$$

en un zéro de  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire en un point  $f$  tel que  $\mathcal{S}(f) = (f, 0)$ .

**Exercice.** Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel. Montrer que, pour tout  $b \in B$ , l'on a un isomorphisme canonique

$$T_{(b,0)}E \simeq T_bB \oplus E_b.$$

Soit  $s : B \rightarrow E$  une section lisse et  $b \in B$  un zéro de  $s$ , à savoir un point tel que  $s(b) = (b, 0)$ . Montrer que, lue à travers l'isomorphisme précédent, la différentielle de  $s$  au point  $b$  agit comme

$$ds(b) = (\text{Id}_{T_bB}, ds^{\text{vert}}(b)) : T_bB \rightarrow T_bB \oplus E_b,$$

avec

$$ds^{\text{vert}}(b) : T_bB \rightarrow E_b$$

une application linéaire.

L'on dit que  $s$  est transverse à la section nulle si  $ds^{\text{vert}} : T_bB \rightarrow E_b$  est surjective pour tout zéro  $b$  de  $s$ . Montrer que cette condition est équivalente à

$$T_bB + T_{(b,0)}\text{im}(s) = T_{(b,0)}E.$$

**Exercice 1.** Soit  $M$  une variété et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Montrer que la section  $df \in \Gamma(T^*M)$  est transverse à la section nulle si et seulement si  $f$  est une fonction de Morse.

Revenons à nouveau au contexte fonctionnel. Soit  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$  un zéro de  $\mathcal{S}$ . La différentielle  $d\mathcal{S}(f)$  est donc uniquement déterminée par

$$d\mathcal{S}^{\text{vert}} : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}_f.$$

En pratique la fibre  $\mathcal{E}_f$  est elle-même décrite comme espace de sections d'un certain fibré vectoriel et l'opérateur  $d\mathcal{S}^{\text{vert}}(f)$  est un opérateur linéaire et continu par rapport à un choix approprié de normes.

**Exemple.** Soit  $(\Sigma, j)$  une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1, pour laquelle on note la structure complexe par  $j$ . Ainsi  $j \in \Gamma(\text{End}(TS))$ ,  $j^2 = -\text{Id}$ . Soit  $(Y, J)$  une variété complexe, pour laquelle on note  $J$  la structure complexe, de sorte que  $J \in \Gamma(\text{End}(TY))$ ,  $J^2 = -\text{Id}$ . Considérons le problème de trouver des applications holomorphes parmi les applications lisses

$$f : \Sigma \rightarrow Y.$$

Le fait que la différentielle  $df$  d'une telle application soit  $\mathbb{C}$ -linéaire en tout point, c'est-à-dire qu'elle vérifie  $df \circ j = J \circ df$ , est équivalent à l'annulation de l'expression

$$\bar{\partial}f := df + J \circ df \circ j$$

en tout point de  $\Sigma$ . Notons que  $\bar{\partial}f \in \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY))$ , le fibré des homomorphismes  $\mathbb{R}$ -linéaires et  $\mathbb{C}$ -anti-linéaires de  $T\Sigma$  dans  $f^*TY$ , encore noté  $\Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY)$ . L'équation des courbes holomorphes définies sur  $\Sigma$  à valeurs dans  $Y$  est donc

$$\bar{\partial}f = 0,$$

avec  $\bar{\partial}$  interprétée comme section d'un fibré (de rang infini)  $\mathcal{E}$  au-dessus de  $\mathcal{F}(\Sigma, Y)$  dont la fibre est donnée par

$$\mathcal{E}_f = \Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY).$$

La linéarisation de  $\bar{\partial}$  en un zéro  $f$  est donc déterminée par l'opérateur

$$d\bar{\partial}^{vert}(f) : \Gamma(f^*TY) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY)).$$

L'on peut bien évidemment expliciter cet opérateur, par exemple en coordonnées locales. Il se trouve qu'il est elliptique et donc de Fredholm lorsqu'on le fait agir entre des complétions de Sobolev appropriées. Ses propriétés déterminent les propriétés locales de l'espace des courbes holomorphes  $\Sigma \rightarrow Y$ .

## 2. CLASSIFICATION DES FIBRÉS. HOMOTOPIE

La question que nous posons maintenant est celle de classifier les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang  $k$  donné sur une base donnée. Nous allons voir que celles-ci forment un ensemble discret qui peut être mis en bijection avec certains ensembles de classes d'homotopie d'applications.

Rappelons qu'un isomorphisme entre deux fibrés  $E, F$  sur une même base  $B$  est un difféomorphisme  $E \rightarrow F$  qui commute avec les projections et réalise un isomorphisme linéaire  $E_b \rightarrow F_b$  entre les fibres au-dessus de tout point  $b \in B$ . Les isomorphismes de fibrés sont les isomorphismes dans la catégorie des fibrés au-dessus de  $B$ , dont les morphismes sont les applications lisses  $E \rightarrow F$  qui commutent avec les projections et qui sont linéaires en restriction à chaque fibre.

**2.1. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères.** Le cas particulier où la base est une sphère fait déjà apparaître les notions clé qui permettent de comprendre le cas général.

**Théorème 2.1.** *Soient  $k \geq 1, n \geq 1$ . L'ensemble*

$$\mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(S^n)$$

*des classes d'isomorphisme de fibrés de rang  $k$  sur  $\mathbb{K}$  au-dessus de la sphère  $S^n$  sont en correspondance bijective avec*

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})).$$

*Ici  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  désigne le  $(n-1)$ -ème groupe d'homotopie du groupe linéaire  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ , à savoir les classes d'homotopie d'applications à point base  $(S^{n-1}, *) \rightarrow (\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}), \mathrm{Id})$ . L'action du groupe  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  sur l'ensemble  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  est induite par l'action de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  sur lui-même par conjugaison.*

**Remarque préliminaire concernant l'action de  $\pi_0$  sur  $\pi_{n-1}$ .** Pour tout groupe de Lie  $G$ , l'ensemble  $\pi_0(G)$  est l'ensemble des composantes connexes de  $G$  et possède une structure de groupe canonique induite par la multiplication dans  $G$ . Pour un espace topologique  $X$  l'ensemble  $\pi_0(X)$  est l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ , mais il ne possède pas en général une structure de groupe. Pour un groupe de Lie, et plus généralement pour une variété, les composantes connexes coïncident avec les composantes connexes par arcs.

Tout groupe de Lie  $G$  agit sur lui-même par conjugaison via la représentation  $G \mapsto \mathrm{Diff}(G), g \mapsto \iota_g, \iota_g(h) = ghg^{-1}$ . Chacun des difféomorphismes  $\iota_g$  préserve la composante connexe de l'identité. Pour deux éléments  $g, g'$  appartenant à la même composante connexe de  $G$  les applications  $\iota_g$  et  $\iota_{g'}$  sont homotopes en tant qu'applications

préservant le point base donné par l'élément neutre  $e \in G$ . Ainsi  $\pi_0(G)$  agit sur tous les groupes d'homotopie d'ordre supérieur  $\pi_i(G, e)$ ,  $i \geq 1$ . Cette action est bien-sûr triviale si  $G$  est connexe.

L'on a en particulier

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})) \simeq \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))$$

puisque  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$  est connexe.

L'on a aussi

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})) \simeq \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$$

pour  $k$  impair. Mais en général l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})) \simeq \{\pm 1\}$  n'est pas triviale lorsque  $k$  est pair. L'on renvoie à une discussion plus détaillée à la fin de cette section.

*Démonstration.* Nous allons décrire une bijection explicite

$$\mathcal{R} : \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{K}}(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})).$$

(L'on utilise la notation  $\mathcal{R}$  pour signifier que l'élément  $\mathcal{R}(E)$  décrit  $E$  comme “ $\mathcal{R}$ ecollement” de deux fibrés triviaux sur des boules de dimension  $n$ .)

Écrivons la sphère comme union de deux hémisphères

$$S^n = D_+^n \cup D_-^n, \quad D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$$

et fixons un point  $p$  sur l'équateur  $S^{n-1}$ . Fixons aussi un isomorphisme linéaire  $E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$ .

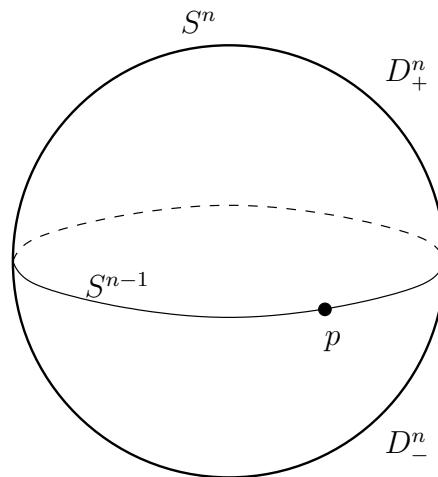


FIGURE 2

Nous démontrons l'affirmation suivante comme cas particulier d'un résultat plus général (Corollaire 2.8), après la preuve.

*Affirmation No. 1 :* Le fibré  $E$  est trivial en restriction à  $D_{\pm}^n$ .  $\square$

Après composition au but par des éléments appropriés de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ , nous obtenons des trivialisations

$$\Phi_{\pm} : E|_{D_{\pm}^n} \xrightarrow{\sim} D_{\pm}^n \times \mathbb{K}^k$$

qui coïncident avec l'isomorphisme fixé au-dessus du point  $p$ . En restriction à  $S^{n-1}$  l'on obtient une application

$$\Phi = \Phi_+ \circ \Phi_-^{-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}), \quad \Phi(p) = \mathrm{Id}$$

et l'on définit

$$\mathcal{R}(E) := [\Phi],$$

la classe sous l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  de la classe d'homotopie de  $\Phi$ .

Pour montrer la bonne définition de l'application  $\mathcal{R}$  il s'agit de montrer que la classe d'homotopie de  $\Phi$  est indépendante du choix des trivialisations  $\Phi_{\pm}$ , ainsi que du choix de l'isomorphisme  $E_p \simeq \mathbb{K}^k$ . En effet, lorsque l'on choisit deux trivialisations différentes  $\Psi_{\pm}$ , l'on peut écrire en restriction à  $S^{n-1}$

$$\Psi_+ \Psi_-^{-1} = (\Psi_+ \Phi_+^{-1}) \Phi_+ \Phi_-^{-1} (\Phi_- \Psi_-^{-1}).$$

Mais  $\Psi_+ \Phi_+^{-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  est une application qui admet par définition une extension à  $D_+^n$ , donc nulle homotope. Il en est de même pour  $\Phi_- \Psi_-^{-1}$  et l'on conclut que  $\Psi_+ \Psi_-^{-1}$  est homotope à  $\Phi_+ \Phi_-^{-1}$ .

Lorsque l'on change l'isomorphisme  $\alpha : E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$  en  $\beta : E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$ , à partir de deux trivialisations  $\Phi_{\pm}$  qui coïncident avec  $\alpha$  au-dessus du point  $p$  l'on peut considérer les trivialisations  $(\beta\alpha^{-1})\Phi_{\pm}$  qui coïncident avec  $\beta$  au-dessus du point  $p$ . Alors  $\Phi_+ \Phi_-^{-1}$  change par conjugaison avec  $\beta\alpha^{-1}$ . La classe de (la classe d'homotopie de)  $\Phi$  sous l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  ne change donc pas.

La conclusion de cette discussion est que la valeur de  $\mathcal{R}(E)$  ne dépend bien que de la classe d'isomorphisme du fibré  $E$ .

L'application  $\mathcal{R}$  est surjective. En effet, étant donnée une classe de  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  représentée par  $\Phi : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  avec  $\Phi(p) = \mathrm{Id}$ , l'on définit un fibré  $E$  tel que  $\mathcal{R}(E) = [\Phi]$  par

$$E = D_+^n \times \mathbb{K}^k \sqcup D_-^n \times \mathbb{K}^k / \sim$$

où, pour  $(q, v) \in D_+^n \times \mathbb{K}^k$  et  $(q', v') \in D_-^n \times \mathbb{K}^k$ , l'on a

$$(q, v) \sim (q', v') \quad \Leftrightarrow \quad q = q' \text{ et } v = \Phi(q)v'.$$

L'application  $\mathcal{R}$  est injective. Soient  $E_0, E_1$  deux fibrés de rang  $k$  et construisons des applications  $\Phi_i : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ ,  $i = 0, 1$  comme ci-dessus, avec  $\Phi_i(p) = \mathrm{Id}$ . Il s'agit de montrer que, si les classes  $[\Phi_0]$  et  $[\Phi_1]$  sont égales, alors les fibrés  $E_0$  et  $E_1$  sont isomorphes. Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  les applications  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  sont homotopes. Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , quitte à composer au but l'isomorphisme linéaire  $E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$  qui



détermine  $\Phi_1$  par un automorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^k$  qui change l'orientation, l'on peut supposer sans perte de généralité que les applications  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  sont homotopes.

La construction précédente peut alors être mise en famille : une homotopie  $\Phi_t$ ,  $t \in [0, 1]$  entre  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  détermine un fibré  $\mathcal{E}$  au-dessus de  $S^n \times [0, 1]$ , avec  $\mathcal{E}|_{S^n \times \{0\}} \simeq E_0$  et  $\mathcal{E}|_{S^n \times \{1\}} \simeq E_1$  par construction. La conclusion découle alors de l'affirmation suivante, qui sera aussi démontrée plus bas (cf. preuve du Corollaire 2.7).

*Affirmation No. 2 :* Soit  $B$  une variété et  $\mathcal{E}$  un fibré sur  $B \times [0, 1]$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$  les fibrés  $\mathcal{E}|_{B \times \{t\}} \rightarrow B$  sont isomorphes.

□

La preuve fait apparaître plusieurs phénomènes importants :

**(I) Fibrés vectoriels et homotopie.** Tout fibré vectoriel sur une boule est trivial (Affirmation No. 1). Plus généralement, tout fibré sur le produit d'une variété avec un intervalle est isomorphe au tiré en arrière d'un certain fibré sur la variété en question par la projection (Affirmation No. 2, légèrement reformulée). De façon plus générale, *il existe un lien étroit entre classes d'homotopie d'applications, ou encore type d'homotopie d'espaces, et classes d'isomorphisme de fibrés.*

**(II) Groupes d'homotopie d'ordre supérieur.** L'énoncé du théorème 2.1 met en évidence de façon naturelle les groupes d'homotopie de  $GL_k(\mathbb{K})$ . L'on peut se douter que, de façon plus générale, *les groupes d'homotopie des groupes linéaires jouent un rôle important dans la classification des fibrés vectoriels sur une base quelconque.*

Toute tentative de classification dans une situation concrète nécessite des outils de calcul de ces groupes d'homotopie. Nous allons expliciter plus bas la structure de groupe de ces derniers. L'exercice suivant se posera alors comme une question naturelle au lecteur.

**Exercice 2.** Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  décrire de façon directe la structure de groupe induite sur  $\mathcal{Vect}_k^{\mathbb{C}}(S^n)$  par la bijection  $\mathcal{R}$ , sans se référer à la structure de groupe de  $\pi_{n-1}(GL_k(\mathbb{C}))$ . Discuter le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**(III) Décompositions cellulaires.** Dans la preuve du théorème 2.1 il a été utile de décomposer la sphère comme union de deux boules recollées le long de leur bord, et ce qui a permis d'avancer dans la preuve a été le fait que la restriction de tout fibré à une boule est triviale (Affirmation No. 1). De façon plus générale, *dans un problème de classification de fibrés vectoriels sur une base quelconque il sera utile de considérer des "décompositions cellulaires" de la base, c'est-à-dire de la présenter comme union de boules (de différentes dimensions, collées le long de leur bord "de façon ordonnée").*

Nous allons reprendre chacun de ces trois thèmes par la suite.

**Remarque-Exercice (action de  $\pi_0$  sur  $\pi_{n-1}$ ).** Rappelons que le groupe de Lie  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$  a exactement deux composantes connexes, que l'on note  $\mathrm{GL}_k^\pm(\mathbb{R})$  et qui sont distinguées par le signe du déterminant.

Le fait que l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$  sur  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$  est triviale pour  $k$  impair se justifie ainsi : la matrice diagonale  $\mathrm{diag}(-1, -1, \dots, -1)$  appartient en même temps à  $\mathrm{GL}_k^-(\mathbb{R})$  et au centre de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ , de sorte qu'elle induit par conjugaison l'identité de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ .

Noter aussi que l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$  sur lui-même induite par la conjugaison dans  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$  est triviale.

Lorsque  $k$  est pair, l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$  sur  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ ,  $n-1 \geq 1$  peut être non triviale, comme le montre l'exemple suivant.

Rappelons que le procédé de Gram-Schmidt peut être interprété comme réalisant un difféomorphisme

$$\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \simeq O(k) \times T_k,$$

avec  $T_k$  l'espace des matrices  $k \times k$  triangulaires supérieures ayant des coefficients positifs sur la diagonale. Il s'ensuit que  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$  se rétracte sur  $O(k)$  et l'inclusion  $SO(k) \hookrightarrow \mathrm{GL}_k^+(\mathbb{R})$  induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homotopie.

Considérons  $k = 2$ ,  $n = 2$ . Nous obtenons

$$\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \pi_1(SO(2)) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

et un générateur est donné par le lacet de rotations

$$\gamma : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La conjugaison par la matrice  $\mathrm{diag}(-1, 1) \in \mathrm{GL}_2^-(\mathbb{R})$  fournit le lacet

$$\bar{\gamma} : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Celui-ci représente l'autre générateur de  $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$ , puisque  $\bar{\gamma}(\theta) = \gamma(-\theta)$ .

Si l'on identifie  $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$  à  $\mathbb{Z}$  via  $\gamma \mapsto 1$ , alors

$$\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))/\pi_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Montrer que les fibrés  $\mathcal{O}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$  forment un système complet de représentants pour  $\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(S^2) \simeq \pi_1(\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})) = \pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ . À quel générateur correspond  $\mathcal{O}(1)$ ? Remarquer le fait que  $\mathcal{O}(-k) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(k), \mathbb{C})$ , le dual de  $\mathcal{O}(k)$  en tant que fibré complexe.

Soit  $E$  un fibré complexe. Montrer que le fibré réel sous-jacent à son dual complexe est isomorphe au dual réel du fibré réel sous-jacent à  $E$ .

Montrer que tout fibré réel est isomorphe à son dual.

Ainsi  $\mathcal{O}(-k)$  et  $\mathcal{O}(k)$  sont isomorphes en tant que fibrés réels, ce qui reflète précisément le fait que l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$  sur  $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$  n'est pas triviale : elle identifie  $\mathcal{O}(-k)$  à  $\mathcal{O}(k)$ .

**2.2. Notions de topologie différentielle.** Cette section traite de connexions linéaires, d'approximation de fonctions continues par des fonctions lisses, et de transversalité, avec la mise en évidence de certaines applications importantes en théorie de l'homotopie.

*2.2.1. Rappels sur les connexions.* Le fait de travailler avec des fibrés vectoriels lisses sur des variétés présente comme avantage la possibilité d'utiliser les connexions linéaires. De façon intuitive, une connexion sur un fibré est une donnée supplémentaire qui permet de se déplacer depuis une fibre vers les fibres voisines. Autrement dit, c'est un moyen de "connecter" les fibres voisines. Le lecteur est invité à noter le fait qu'un tel mouvement n'est pas canoniquement défini dans un fibré "nu".

Nous discutons dans cette section les connexions en adoptant le point de vue des dérivées covariantes, et nous renvoyons le lecteur à l'Annexe A pour des compléments en lien avec la notion de distribution horizontale. Les Corollaires 2.7 et 2.8 ci-dessous démontrent en particulier les Affirmations 1 et 2 de la preuve précédente.

**Notation.** Étant donné un fibré  $E$  sur une base  $B$  et un entier  $k \geq 0$ , l'on note

$$\Omega^k(B, E) = \Gamma(\Lambda^k T^*B \otimes E)$$

l'espace des  $k$ -formes sur  $B$  à valeurs dans  $E$ . Ce sont les familles lisses d'applications  $k$ -multilinéaires alternées  $T_p B \times \cdots \times T_p B \rightarrow E_p$ ,  $p \in B$ . L'on a par définition  $\Omega^0(B, E) = \Gamma(E)$ .

**Définition 2.2.** Une connexion linéaire est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(B, E)$$

(lue "nabla") qui vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s, \quad f \in \mathcal{F}(B).$$

Autrement dit, une connexion linéaire est une dérivation sur  $\Gamma(E)$  par rapport à sa structure de  $\mathcal{F}(B)$ -module. De façon explicite, pour tout champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(B)$ , l'on a  $\nabla_X s \in \Gamma(E)$  et

$$\nabla_X(fs) = df(X)s + f\nabla_X s, \quad \nabla_{fX}s = f\nabla_X s.$$

**Lemme 2.3.** La valeur de  $\nabla_X s$  en un point  $p \in B$  ne dépend que de la valeur de  $X(p)$  et des valeurs de  $s$  au voisinage de  $p$  le long d'une courbe tangente à  $X(p)$ .

*Démonstration.* Montrons que, pour  $s$  fixée, la valeur  $\nabla_X s|_p$  ne dépend que de  $X(p)$ . Montrons d'abord que celle-ci ne dépend que du germe de  $X$  en  $p$  : soit  $f \in \mathcal{F}(B)$  avec  $f(p) = 1$  et à support dans un voisinage  $U$  fixé de  $p$  ; alors  $\nabla_{fX}s|_p = f(p)\nabla_X s|_p = \nabla_X s|_p$ , ce qui prouve que cette dernière quantité ne dépend que de  $X|_U$ . Montrons maintenant que  $\nabla_X s|_p$  ne dépend que de  $X(p)$ . Par linéarité en  $X$  il suffit de montrer

que  $\nabla_X s|_p = 0$  si  $X(p) = 0$ . Par ce qui précède l'on peut supposer que  $X$  est à support compact dans un ouvert de carte  $(x^1, \dots, x^n)$  dans  $B$ , sur lequel on peut écrire  $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  avec  $X^i$  des fonctions qui s'annulent en  $p$ . Quitte à multiplier par une fonction de troncature supportée dans l'ouvert de carte et égale à 1 sur le support de  $X$ , l'on peut étendre les  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  en des champs de vecteurs sur  $B$  pour lesquels on a encore  $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , et finalement  $\nabla_X s|_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s|_p = 0$ .

Montrons maintenant que, à  $X(p)$  fixé, la valeur  $\nabla_X s|_p$  ne dépend que des valeurs de  $s$  au voisinage de  $p$  le long d'une courbe tangente à  $X(p)$ . Un argument semblable à celui du paragraphe précédent montre que  $\nabla_X s|_p$  ne dépend que du germe de  $s$  en  $p$  : l'on considère une fonction  $f \in \mathcal{F}(B)$  avec  $f(p) = 1$  et à support dans un voisinage  $U$  fixé de  $p$ , pour laquelle on obtient  $\nabla_X(fs)|_p = X_p(f)s(p) + f(p)\nabla_X s|_p = \nabla_X s|_p$ . L'on peut donc supposer sans perte de généralité que  $s$  est à support compact dans un ouvert de trivialisatation  $U$  pour  $E$ . En notant  $(e_1, \dots, e_k)$  un repère local sur  $U$ , que l'on peut étendre en un système de  $k$  sections globales de  $E$  en multipliant par une fonction de troncature égale à 1 sur le support de  $s$ , l'on peut écrire  $s = \sum_{i=1}^k s^i e_i$  avec  $s^i$  des fonctions à support compact. L'on obtient alors

$$\nabla_X s|_p = \sum_{i=1}^k X_p(s^i) e_i(p) + s^i(p) \nabla_X e_i.$$

La conclusion en découle puisque les quantités  $X_p(s^i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  ne dépendent que des valeurs des  $s^i$  au voisinage de  $p$  le long d'une courbe tangente à  $X(p)$ .  $\square$

Soit  $\gamma : I \rightarrow B$  une courbe lisse avec  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle. Une *section de  $E$  le long de  $\gamma$*  est une courbe lisse  $s : I \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ s = \gamma$ ; de façon équivalente, c'est une section de  $\gamma^* E$ . Le lemme précédent et sa preuve suggèrent la définition suivante.

**Proposition-Définition 2.4** (cf. Gallot-Hulin-Lafontaine 2.68). *Il existe un unique opérateur*

$$\nabla_t : \Gamma(\gamma^* E) \rightarrow \Gamma(\gamma^* E)$$

*qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) *pour toute fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et toute section  $s \in \Gamma(\gamma^* E)$ , l'on a*

$$\nabla_t(fs)|_t = f'(t)s(t) + f(t)\nabla_t s|_t.$$

(ii) *si  $s \in \Gamma(\gamma^* E)$  est la restriction à l'image de  $\gamma$  d'une section  $\tilde{s}$  définie sur un voisinage, alors*

$$\nabla_t s|_t = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{s}|_{\gamma(t)}.$$

$\square$

L'on appelle l'opérateur  $\nabla_t$  *dérivée covariante le long de  $\gamma$* . L'on renvoie à *loc. cit.* pour les détails de la preuve et nous donnons ici simplement la définition de  $\nabla_t$  : étant donné un repère local  $(e_1, \dots, e_k)$  au voisinage de  $\gamma(t)$ , l'on écrit  $s = \sum_{i=1}^k s^i(t)e_i(\gamma(t))$  et l'on pose

$$\nabla_t s|_t = \sum_{i=1}^k \frac{ds^i}{dt} e_i(\gamma(t)) + s^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} e_i|_{\gamma(t)}.$$

L'un des points qu'il faut retenir de cette définition est que, alors même qu'une section de  $E$  le long de  $\gamma$  peut ne pas provenir d'une section définie au voisinage (par exemple si  $\gamma$  est constante et  $s$  ne l'est pas), néanmoins elle peut toujours s'écrire localement en  $t$  comme combinaison linéaire à coefficients dépendant de  $t$  de sections qui sont définies au voisinage de  $\gamma$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse et  $E$  un fibré sur  $Y$ . Montrer que toute connexion sur  $E$  induit naturellement une connexion sur  $f^*E$ . Montrer que la dérivée covariante  $\nabla_t$  le long d'une courbe  $\gamma$  est la connexion induite par  $\nabla$  sur  $\gamma^*E$ .

**Définition 2.5.** Une section  $s$  définie le long d'une courbe  $\gamma$  est dite horizontale si

$$\nabla_t s = 0.$$

**Proposition-Définition 2.6.** Soit  $\gamma : I \rightarrow B$  une courbe lisse. Pour tout  $v \in E_{\gamma(t_0)}$  il existe une unique section horizontale  $s_v$  définie le long de  $\gamma$  telle que  $s_v(t_0) = v$ .

L'application

$$\tau_{t_0, t_1}^\gamma : E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}, \quad v \mapsto s_v(t_1)$$

est un isomorphisme linéaire. On l'appelle transport parallèle le long de  $\gamma$ .

Avant de donner la preuve de cette proposition importante, faisons quelques remarques préliminaires.

**Remarques.**

(1) L'espace des connexions sur un fibré  $E$  donné est un espace affine sur  $\Omega^1(B, \text{End}(E))$ . En effet, l'on vérifie sans peine que la différence de deux connexions est bien un élément de  $\Omega^1(B, \text{End}(E))$  par un argument similaire à ceux du lemme 2.3 en utilisant le fait que cette différence est  $\mathcal{F}(B)$ -linéaire en  $s$ .

(2) L'espace des connexions sur un fibré  $E$  est non-vide. En effet, il existe toujours une connexion sur la restriction de  $E$  à un ouvert  $U$  de trivialisations : les sections de  $E|_U$  s'identifient aux fonctions  $U \rightarrow \mathbb{K}^k$  et la différentielle des fonctions détermine la connexion "triviale"

$$d_X(s^1, \dots, s^k) := (ds^1 \cdot X, \dots, ds^k \cdot X).$$

Sur une variété quelconque, l'on considère un recouvrement  $(U_i)$  par des ouverts de trivialisations, une partition de l'unité subordonnée  $(\rho_i)$ , une collection de connexions  $\nabla^i$  sur  $E|_{U_i}$ , et l'on construit une connexion globale par la formule

$$\nabla_X s := \sum_i \nabla_{X|_{U_i}}^i (\rho_i s) = \sum_i \rho_i \nabla_{X|_{U_i}}^i s.$$

*Démonstration de la Proposition 2.6.* Plaçons-nous sur un ouvert  $U$  de trivialisations au voisinage de  $\gamma(t_0)$  et considérons  $t_1$  tel que  $\gamma([t_0, t_1]) \subset U$ . Soit  $d$  la connexion triviale sur  $E|_U$  et écrivons  $\nabla = d - A$ , avec  $A \in \Omega^1(U, \text{End}(E))$ . L'on vérifie alors à partir de la définition que

$$\nabla_t s = d_t s - (A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))(s).$$

Si l'on identifie  $s$  à un vecteur de fonctions  $s = (s^1, \dots, s^k) : I \rightarrow \mathbb{K}^k$ , alors  $d_t s = \frac{ds}{dt}$ . Ainsi  $s$  est horizontale si et seulement si elle vérifie l'équation différentielle *linéaire*

$$\frac{ds}{dt} = (A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)) \cdot s.$$

L'on conclut par le fait que le flot d'une équation différentielle linéaire est une famille d'isomorphismes linéaires. Ceci achève la preuve lorsque  $t_1$  est proche de  $t_0$ . Pour  $t_1$  arbitraire l'on découpe l'intervalle  $I$  en sous-intervalles suffisamment petits et l'on utilise le fait que le flot d'une équation différentielle linéaire est toujours défini globalement.  $\square$

**Corollaire 2.7.** *Soient  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  deux applications homotopes et  $E$  un fibré vectoriel sur  $Y$ . Les fibrés induits  $f_0^* E$  et  $f_1^* E$  sont alors isomorphes.*

*Démonstration.* Soit  $f : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  une homotopie lisse (!) et considérons le fibré induit  $f^* E$ . Celui-ci admet une connexion linéaire. Le transport parallèle le long des courbes  $\{x\} \times [0, 1]$ ,  $x \in X$ , réalise un isomorphisme entre  $f_0^* E$  et  $f_1^* E$ . Ici l'on utilise le fait que le flot d'une équation différentielle à paramètre dépend de façon lisse du paramètre. (Dans notre cas, l'espace des paramètres est la variété  $X$ .)  $\square$

**Corollaire 2.8.** *Soit  $E$  un fibré vectoriel sur une variété contractile. Alors  $E$  est isomorphe au fibré trivial.*

*Démonstration.* Soit  $B$  la base de  $E$ . Par définition, le fait que  $B$  soit contractile signifie que  $\text{Id}_B$  est homotope à une application constante. Or l'identité induit sur  $B$  de façon tautologique le fibré  $E$ , alors que toute application constante induit sur  $B$  le fibré trivial. L'on conclut par le corollaire précédent.  $\square$

2.2.2. *Approximation de fonctions et homotopie.* Dans ce chapitre nous discutons quelques résultats d'approximation d'applications  $C^0$  ou  $C^k$  entre variétés par des applications  $C^\infty$ , avec des conséquences homotopiques. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 2 du livre de M.W. Hirsch pour une discussion approfondie.

L'on considère les espaces d'applications  $C^r(X, Y)$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$  entre deux variétés lisses. L'on suppose pour simplifier que la source  $X$  est compacte.

Nous munissons  $C^r(X, Y)$ ,  $0 \leq r < \infty$  de la topologie engendrée par les ouverts  $\mathcal{N}^r(f, (U, \varphi), (V, \psi), K, \epsilon)$  suivants. Pour tout choix de cartes  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  sur  $X$ , respectivement  $Y$ , pour tout choix de compact  $K \subset U$  et pour tout choix de réel positif  $\epsilon > 0$ , étant donnée  $f \in C^r(X, Y)$  l'on pose

$$\mathcal{N}^r(f, (U, \varphi), (V, \psi), K, \epsilon)$$

l'ensemble des applications  $g \in C^r(X, Y)$  telles que

$$\|\psi g \varphi^{-1} - \psi f \varphi^{-1}\|_{C^r(K, V)} < \epsilon.$$

**Remarque.** Ceci est la définition de la "topologie faible" sur  $C^r(X, Y)$ , qui coïncide avec la "topologie forte" lorsque  $X$  est compacte. C'est une topologie métrisable, qui admet une métrique de définition complète et une base dénombrable. Ainsi  $C^r(X, \mathbb{R}^k)$  est un espace de Banach.

**Remarque.** Lorsque  $r = 0$ , cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme déterminée par n'importe quel choix de métrique compatible avec la structure différentielle de  $Y$ .

L'espace  $C^\infty(X, Y)$  est muni de la topologie donnée par la réunion des topologies induites via les inclusions  $C^\infty(X, Y) \hookrightarrow C^r(X, Y)$ ,  $0 \leq r < \infty$ .

**Théorème 2.9.**  $C^\infty(X, Y)$  est dense dans  $C^r(X, Y)$ ,  $r \geq 0$ .

*Démonstration.* Il suffit de donner la preuve pour  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$ , qui est le modèle local. Le point clé est de considérer une suite régularisante  $\chi_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ ,  $\nu \geq 1$  constituée d'applications  $C^\infty$  telles que

$$\text{supp } \chi_\nu \subset B(0, \frac{1}{\nu}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\nu = 1.$$

Étant donnée  $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , la convolution

$$\chi_\nu * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\nu(x - y) f(y) dy$$

est lisse, elle converge en topologie  $C^r$  vers  $f$ , et  $\text{supp } \chi_\nu * f \subset \text{supp } f + B(0, \frac{1}{\nu})$ , de sorte que cette construction locale peut être implantée sur une variété en utilisant une partition de l'unité.  $\square$



Une variante utile de ce résultat est la suivante :

**Corollaire 2.10.** *Soit  $A \subset X$  un fermé et  $f \in C^r(X, Y)$  lisse au voisinage de  $A$ . Il existe une suite d'applications  $f_\nu \in C^\infty(X, Y)$ ,  $\nu \geq 1$  qui coïncident avec  $f$  au voisinage de  $A$  et telles que  $f_\nu \xrightarrow{C^r} f$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème d'approximation 2.9 à la fonction  $(1 - \chi)f$ , avec  $\chi : X \rightarrow [0, 1]$  une fonction de troncature lisse supportée au voisinage de  $A$  et égale à 1 au voisinage de  $A$ .  $\square$

**Proposition 2.11.** *Deux applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  qui sont  $C^0$ -proches sont homotopes.*

*Démonstration.* Choisissons une métrique riemannienne sur  $Y$ . Puisque  $X$  est compacte, les images de  $f$  et  $g$  sont contenues dans un compact de  $Y$ , sur lequel le rayon d'injectivité de la métrique riemannienne est strictement positif. Notons-le  $\epsilon > 0$ . Dès que  $\|f - g\|_{C^0} < \epsilon$ , tous deux points  $f(x)$  et  $g(x)$  peuvent être reliés par une unique géodésique minimisante. En paramétrant celle-ci à vitesse constante comme  $\gamma_x(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  l'application  $(x, t) \mapsto \gamma_x(t)$ ,  $x \in X$ ,  $t \in [0, 1]$  réalise une homotopie entre  $f$  et  $g$ .  $\square$

La discussion ci-dessus a comme conséquence directe les deux corollaires suivants.

**Corollaire 2.12.** *Deux applications lisses sont reliées par une homotopie continue si et seulement si elles sont reliées par une homotopie lisse.*  $\square$

Ceci justifie le fait que, dans l'énoncé et la preuve du théorème 2.1, nous n'avons pas précisé si l'on travaille avec des classes d'homotopie lisses ou continues.

**Corollaire 2.13.** *Tout invariant par homotopie lisse défini pour des applications lisses admet une unique extension en un invariant par homotopie continue défini pour des applications continues.*  $\square$

Par exemple, toute application lisse  $f : X \rightarrow Y$  induit un morphisme  $f^* : H_{DR}^*(Y) \rightarrow H_{DR}^*(X)$  en cohomologie de De Rham. Les arguments ci-dessus montrent que l'on peut aussi définir un tel morphisme  $f^*$  pour toute application  $f$  continue, de sorte que la relation fondamentale  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  soit toujours vérifiée. À titre d'exemple, ceci fournit une preuve directe du théorème de Brouwer  $C^0$  : *il n'existe pas d'application continue  $B^n \rightarrow S^{n-1}$  qui étende  $\text{Id}_{S^{n-1}}$* . Cet énoncé implique de manière classique le théorème de point fixe de Brouwer : *toute application continue  $B^n \rightarrow B^n$  possède un point fixe*.

La possibilité de définir un morphisme induit en cohomologie de De Rham pour les applications continues est par ailleurs une indication

du fait que la cohomologie de De Rham est un invariant de nature topologique. En effet, celle-ci est isomorphe à la cohomologie singulière à coefficients réels.

2.2.3. *Transversalité.* La notion de transversalité permet d'utiliser des méthodes de géométrie différentielle en topologie algébrique.

**Définition 2.14.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application différentiable et  $Z \subseteq Y$  une sous-variété. L'on dit que  $f$  est transverse à  $Z$  si la condition suivante est vérifiée : pour tout point  $x \in X$  tel que  $f(x) \in Z$ , l'on a

$$df_x(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y.$$

Dans ce cas on utilise la notation

$$f \pitchfork Z,$$

lue “ $f$  est transverse à  $Z$ ” (Figure 3).

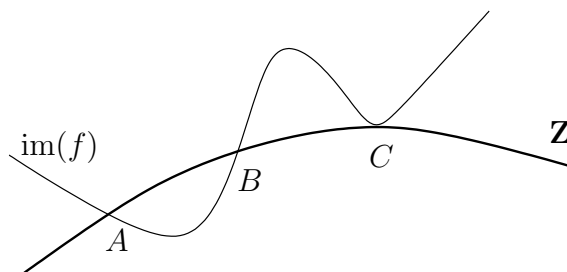


FIGURE 3.  $f$  est transverse à  $Z$  aux points  $A$  et  $B$ , mais pas au point  $C$

Voici deux situations importantes :

- (i) Si  $\dim X < \text{codim } Z$ , alors  $f \pitchfork Z$  si et seulement si  $\text{im}(f) \cap Z = \emptyset$ .
- (ii) Si  $Z = \{p\}$  est un point, alors  $f \pitchfork Z$  si et seulement si  $p$  est une valeur régulière pour  $f$ .

**Proposition 2.15.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  lisse et  $Z \subseteq Y$  une sous-variété. Si  $f \pitchfork Z$  alors  $f^{-1}(Z) \subset X$  est une sous-variété de codimension égale à la codimension de  $Z$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{U} \subset Y$  un voisinage tubulaire de  $Z$ , que l'on identifie à un voisinage de la section nulle dans le fibré normal à  $Z$  dans  $Y$ , noté  $\nu_Y Z$ . Soit  $x \in X$  tel que  $f(x) \in Z$ . Considérons une trivialisations locale  $\mathcal{U} \simeq U \times \mathbb{R}^{\text{codim}(Z)}$  au-dessus d'un voisinage  $U$  de  $f(x)$  dans  $Z$ . La condition de transversalité pour les points voisins de  $f^{-1}(f(x))$  équivaut au fait que 0 est une valeur régulière de  $\text{pr}_2 \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^{\text{codim}(Z)}$  dans cette trivialisations locale. Puisque  $f^{-1}(Z) = (\text{pr}_2 \circ f)^{-1}(0)$  au voisinage de  $f^{-1}(f(x))$ , la conclusion en découle.  $\square$

La notion de transversalité peut être vue comme l'analogue “en famille” de la notion de valeur régulière pour une fonction. Rappelons que, étant donnée une fonction  $f : X \rightarrow Y$ , un point  $p \in Y$  est une *valeur régulière* si la condition suivante est vérifiée : pour tout point

$x \in f^{-1}(p)$ , la différentielle  $df_x : T_x X \rightarrow T_p Y$  est surjective. Un point  $p$  est une *valeur critique* si ce n'est pas une valeur régulière, autrement dit si la condition suivante est vérifiée : il existe un point  $x \in f^{-1}(p)$  tel que la différentielle  $df_x : T_x X \rightarrow T_p Y$  n'est pas surjective (un tel point  $x \in X$  est appelé *point critique*). Il est important de noter que tout point  $p \in Y \setminus \text{im}(f)$  est par définition une valeur régulière. Par contraste, lorsque  $p \in Y$  est une valeur critique alors  $f^{-1}(p) \neq \emptyset$ , aussi par définition.

Le prototype des théorèmes de transversalité est le théorème de Sard. Le lecteur pourra en trouver la démonstration par exemple dans le livre de M.W. Hirsch.

**Théorème 2.16** (Théorème de Sard). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse. L'ensemble de ses valeurs critiques est de mesure nulle dans  $Y$ . L'ensemble de ses valeurs régulières est dense dans  $Y$ .  $\square$*

En appliquant le théorème de Sard à des espaces de fonctions appropriés vus comme des variétés de dimension infinie modelées sur des espaces de Banach, l'on peut démontrer le résultat suivant. À nouveau, l'on renvoie au livre de M.W. Hirsch pour une preuve et pour une discussion beaucoup plus détaillée du sujet.

**Théorème 2.17.** *Soient  $X, Y$  des variétés et  $Z_1, \dots, Z_k \subseteq Y$  des sous-variétés. Soit  $A \subset X$  un fermé,  $A \subset U$  un voisinage ouvert de  $A$  dans  $X$  et  $f : U \rightarrow Y$  une application lisse qui est transverse à tous les  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . L'ensemble des applications lisses de  $X$  dans  $Y$  qui coïncident avec  $f$  sur un voisinage de  $A$  et qui sont simultanément transverses à tous les  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  est dense dans l'espace des applications lisses dont le germe en  $A$  est donné par  $f$ .  $\square$*

En particulier, toute application  $X \rightarrow Y$  peut être approximée en norme  $C^0$  par une application lisse qui lui est homotope et qui est transverse à une sous-variété donnée  $Z$ .

Une variante du théorème de transversalité est le suivant.

**Théorème 2.18.** *Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel. L'ensemble des sections de  $E$  qui sont transverses à la section nulle est dense dans  $\Gamma(E)$ .*

**Remarque.** Lorsqu'une certaine propriété est valable pour un sous-ensemble dense d'une certaine classe d'applications, l'on dit que la propriété en question est *générique*. Une situation emblématique est représentée par le cas des sous-ensembles qui sont denses en tant qu'intersections dénombrables d'ouverts denses dans un espace métrique complet (théorème de Baire). On parle alors de *généricité au sens de Baire*.

Voici une application des méthodes d'approximation et de transversalité au calcul des groupes d'homotopie des sphères.

**Proposition 2.19.** *Soit  $n \geq 2$ . L'on a*

$$\pi_k(S^n) = 0, \quad 1 \leq k < n.$$

*Démonstration.* Soit  $f : (S^k, *) \rightarrow (S^n, *)$ ,  $1 \leq k < n$  une application continue à point base. Soit  $p \in S^n$  différent du point base. Par approximation et transversalité il existe  $g : (S^k, *) \rightarrow (S^n, *)$  lisse, homotope à  $f$  et transverse à la sous-variété  $Z = \{p\}$ . Puisque  $\dim S^k < \text{codim } Z$ , l'on conclut que  $\text{im}(g) \subset S^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$ . Ce dernier espace étant contractile,  $g$  est homotope à une constante, donc  $f$  aussi.  $\square$

Le fait que les sphères  $S^k$ ,  $k \geq 2$  soient simplement connexes a comme conséquence le fait important suivant.

**Proposition 2.20.** *Soit  $(X, *)$  un espace topologique à point base admettant un revêtement universel  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ . Considérons un point base  $\tilde{*} \in \tilde{X}$  tel que  $\pi(\tilde{*}) = *$ . Pour tout  $k \geq 2$  l'application*

$$\pi_* : \pi_k(\tilde{X}, \tilde{*}) \rightarrow \pi_k(X, *), \quad [f] \mapsto [\pi \circ f]$$

*est un isomorphisme de groupes.*

*Démonstration.* Nous démontrons ici que  $\pi_*$  est bijective. Le fait que  $\pi_*$  est un morphisme de groupes est un fait général, qui sera discuté lorsque nous décrirons en détail la structure de groupe sur les  $\pi_k$ ,  $k \geq 2$ .

L'application  $\pi_*$  est surjective puisque toute application vers  $X$  ayant comme source un espace simplement connexe admet un relèvement en une application vers  $\tilde{X}$ .

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{*}) \\ & \nearrow \text{dotted arrow} & \downarrow \pi_* \\ (S^k, *) & \longrightarrow & (X, *) \end{array}$$

L'application  $\pi_*$  est injective puisque les homotopies se relèvent aussi à extrémités fixées.  $\square$

Il est utile de rappeler ici un autre calcul fondamental. La preuve utilise des résultats sur les revêtements.

**Proposition 2.21.** *L'on a*

$$\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

*et*

$$\pi_k(S^1) = 0, \quad k \geq 2.$$

*Démonstration.* Utilisons le modèle  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  et prenons comme point base  $* = 1 \in S^1$ . Le point clé est de remarquer le fait que le revêtement universel du cercle est  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $\theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$ .

Puisque le revêtement universel du cercle est contractile, la Proposition 2.20 implique alors directement l'énoncé sur les  $\pi_k$ ,  $k \geq 2$ .

Pour démontrer l'énoncé sur le  $\pi_1$  nous associons à toute application continue  $f : (S^1, *) \rightarrow (S^1, *)$  un *degré*  $\deg f \in \mathbb{Z}$  défini comme suit. L'application  $f$  admet un relèvement unique  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{f}(0) = 0$ . La condition de relèvement est  $\pi \tilde{f} = f \pi$ , de sorte que  $\tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$ . L'on pose  $\deg f = \tilde{f}(1)$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1. \end{array}$$

L'on vérifie que deux applications homotopes ont même degré. Par ailleurs, tout entier est réalisé comme degré d'une application. En effet,  $k = \deg(f : z \mapsto z^k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi le degré réalise une bijection

$$\deg : \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Le lecteur pourra vérifier que  $\deg$  est même un isomorphisme de groupes.  $\square$

### 2.3. Fibrés vectoriels et homotopie.

La classification des fibrés sur les sphères suggère que la correspondance entre classes d'isomorphisme de fibrés de rang  $k$  sur une base quelconque et classes d'homotopies d'applications pourrait être vraie sur une base quelconque. C'est effectivement le cas.

2.3.1. *Variétés de Stiefel et variétés de Grassmann.* On note  $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$  la *variété de Stiefel*, dont les points sont les tuples de  $k$  vecteurs dans  $\mathbb{K}^n$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{K}$ , encore appelés *k-repères*. L'ensemble  $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est naturellement un ouvert de  $(\mathbb{K}^n)^{\times k}$  et hérite de ce fait une structure naturelle de variété.

Le groupe de Lie  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  agit proprement et librement sur  $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$  et le quotient

$$G_{n,k}^{\mathbb{K}} = V_{n,k}^{\mathbb{K}} / \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$$

hérite de ce fait d'une structure naturelle de variété pour laquelle la projection  $V_{n,k}^{\mathbb{K}} \rightarrow G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est un  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ -fibré principal. L'on a donc en particulier une fibration localement triviale

$$\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}) \hookrightarrow V_{n,k}^{\mathbb{K}} \rightarrow G_{n,k}^{\mathbb{K}}.$$

Les points de  $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  peuvent être interprétés comme les sous-espaces de dimension  $k$  dans  $\mathbb{K}^n$ . L'on appelle  $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  *variété de Grassmann*, ou encore *grassmannienne des k-plans dans  $\mathbb{K}^n$* .

L'on a

$$\dim_{\mathbb{K}} V_{n,k}^{\mathbb{K}} = kn, \quad \dim_{\mathbb{K}} G_{n,k}^{\mathbb{K}} = k(n - k).$$

Le grassmannienne  $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est naturellement la base d'un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{K}$  appelé *fibré tautologique*, noté  $\gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$ , dont la fibre au-dessus d'un point  $V$  désignant un sous-espace  $V \subset \mathbb{K}^n$  de dimension  $k$  est l'espace  $V$  lui-même. La structure de fibré de  $\gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$  peut être décrite de manière rigoureuse comme suit. L'action de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  sur  $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$  admet une extension naturelle au fibré trivial

$$V_{n,k}^{\mathbb{K}} \times \mathbb{K}^k \rightarrow V_{n,k}^{\mathbb{K}}.$$

Celle-ci est encore propre et libre, et aussi linéaire dans les fibres. Par conséquent le quotient hérite d'une structure naturelle de fibré vectoriel. Par ailleurs, un point du quotient s'identifie naturellement à une paire  $(V, v)$  avec  $V \in G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  et  $v \in V$ .

**Exercice.** Soit  $\pi : V_{n,k}^{\mathbb{K}} \rightarrow G_{n,k}^{\mathbb{K}}$ . Montrer que  $\pi^* \gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est trivial.

**Exercice.** La variété  $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est compacte.

Il existe des plongements naturels

$$V_{n,k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow V_{n+1,k}^{\mathbb{K}}, \quad G_{n,k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow G_{n+1,k}^{\mathbb{K}}$$

et aussi

$$\gamma_{n,k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow \gamma_{n+1,k}^{\mathbb{K}}$$

induits par le plongement  $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ ,  $v \mapsto (v, 0)$ . L'on note

$$V_k^{\mathbb{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{n,k}^{\mathbb{K}}, \quad G_k^{\mathbb{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n,k}^{\mathbb{K}}$$

et

$$\tau_k^{\mathbb{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$$

les limites directes déterminées par ces systèmes dirigés de plongements. Alors  $\tau_k^{\mathbb{K}}$  est un fibré localement trivial sur  $G_k^{\mathbb{K}}$ .

**2.3.2. Théorème de classification.** Étant donnés deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$ , l'on note  $[X, Y]$  l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de  $X$  dans  $Y$ .

**Théorème 2.22.** *Soit  $B$  une variété,  $k \geq 1$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . L'application*

$$[B, G_k^{\mathbb{K}}] \longrightarrow \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{K}}(B), \quad f \mapsto f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}$$

*est une bijection.*

Nous allons au fait démontrer la version plus fine suivante.

**Théorème 2.23.** *Soit  $B^n$  une variété de dimension  $n$ ,  $k \geq 1$  un entier.*

*(i) Le cas réel  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . L'application*

$$[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \longrightarrow \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{R}}(B), \quad f \mapsto f^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$$

*est une bijection pour tout  $s > k + n$ .*

*Pour  $s' \geq s > k + n$ , l'inclusion  $G_{s,k}^{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{s',k}^{\mathbb{R}}$  induit une bijection  $[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \xrightarrow{\sim} [B, G_{s',k}^{\mathbb{R}}]$  qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} [B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] & \longrightarrow & [B, G_{s',k}^{\mathbb{R}}] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{R}}(B). \end{array}$$

*(i) Le cas complexe  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . L'application*

$$[B, G_{s,k}^{\mathbb{C}}] \longrightarrow \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{C}}(B), \quad f \mapsto f^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{C}}$$

*est une bijection pour tout  $s$  tel que  $2(s - k) + 1 > n$ .*

*Pour deux tels choix  $s' \geq s$ , l'inclusion  $G_{s,k}^{\mathbb{C}} \hookrightarrow G_{s',k}^{\mathbb{C}}$  induit une bijection  $[B, G_{s,k}^{\mathbb{C}}] \xrightarrow{\sim} [B, G_{s',k}^{\mathbb{C}}]$  qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} [B, G_{s,k}^{\mathbb{C}}] & \longrightarrow & [B, G_{s',k}^{\mathbb{C}}] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{C}}(B). \end{array}$$



Étant donné un fibré  $\xi$ , une application  $f : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{K}}$  telle que  $f^*\gamma_{s,k}^{\mathbb{K}} \simeq \xi$  est appelée *application classifiante pour  $\xi$* .

Nous verrons au cours de la preuve que tout fibré  $\xi \rightarrow B^n$  de rang  $k$  sur  $\mathbb{R}$  admet une application classifiante  $f : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$  dès que  $s \geq k + n$ , et que la classe d'homotopie de celle-ci est unique dès que  $s > k + n$ . (Dans le cas complexe, les conditions  $s - k \geq n$  et  $s - k > n$  doivent être remplacées par les conditions plus faibles  $2(s - k) + 1 \geq n$ , respectivement  $2(s - k) + 1 > n$ .)

Il est utile de commencer par la caractérisation suivante des tirés en arrière. Étant donnés deux fibrés  $\xi \xrightarrow{\pi_\xi} M$ ,  $\eta \xrightarrow{\pi_\eta} N$ , on appelle *morphisme de fibrés* un couple  $(F, f)$  avec  $F : \xi \rightarrow \eta$ ,  $f : M \rightarrow N$  tels que  $\pi_\eta F = f \pi_\xi$  et  $F|_{\xi_x} : \xi_x \rightarrow \eta_{f(x)}$  linéaire pour tout  $x \in M$ . L'on dira aussi dans cette situation que  $F$  est un *morphisme de fibrés qui relève  $f$* , ou encore que  $F$  est un *morphisme de fibrés au-dessus de  $f$* .

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{F} & \eta \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ M & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

**Lemme 2.24.** *Soient  $\xi \rightarrow M$ ,  $\eta \rightarrow N$  deux fibrés et  $f : M \rightarrow N$  une application continue. Alors  $\xi \simeq f^*\eta$  si et seulement si il existe un morphisme de fibrés  $F : \xi \rightarrow \eta$  qui relève  $f$  et qui est bijectif sur les fibres.*

*Démonstration.* Il est clair que le fibré  $f^*\eta$  admet un morphisme  $f^*\eta \rightarrow \eta$  qui relève  $f$  et qui est bijectif sur les fibres : puisque  $(f^*\eta)_x = \eta_{f(x)}$ , l'on pose  $F|_{(f^*\eta)_x} = \text{id}_{\eta_{f(x)}}$ .

Réciproquement, supposons que  $\xi$  admet un morphisme  $F : \xi \rightarrow \eta$  qui relève  $f$  et qui est bijectif dans les fibres. Pour montrer  $\xi \simeq f^*\eta$  il suffit de vérifier que le couple  $(\xi, F)$  vérifie propriété d'universalité du tiré en arrière : pour tout fibré  $\xi' \rightarrow M$  et tout morphisme  $F' : \xi' \rightarrow \eta$  qui relève  $f$ , il existe un unique morphisme de fibrés  $\Theta : \xi' \rightarrow \xi$  au-dessus de l'identité de  $M$  tel que  $F' = F \circ \Theta$ .

$$\begin{array}{ccccc} \xi' & & & & \eta \\ & \searrow^{F'} & & & \downarrow \pi_\eta \\ & & \xi & \xrightarrow{F} & \eta \\ & \searrow^{\Theta} & \downarrow \pi_\xi & & \\ & & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Notons  $F_p = F|_{\xi_p}$ ,  $F'_p = F'|_{\xi'_p}$ . L'on doit alors nécessairement avoir  $\Theta(p, v) = (p, F_p^{-1}(F'_p(v)))$  pour tout  $p \in M$  et  $v \in \xi'_p$ . L'on vérifie

par ailleurs que cette expression définit bien une application de même régularité que celle de  $F$  et  $F'$ , puisque l'inversion dans  $GL(V)$  est de classe  $C^\infty$  pour tout espace vectoriel  $V$ . Ainsi  $\Theta : \xi' \rightarrow \xi$  est un morphisme de fibrés au-dessus de  $\text{Id}_M$  qui est bijectif sur les fibres.  $\square$

Afin de présenter un fibré  $\xi$  comme tiré en arrière du fibré tautologique sur la grassmannienne nous sommes donc amenés à exhiber des morphismes de fibrés  $\xi \rightarrow \gamma_{s,k}^{\mathbb{K}}$  bijectifs sur les fibres. La remarque qui suit montre que cette dernière question peut être reformulée de façon avantageuse.

**Lemme 2.25.** *Soit  $\xi \rightarrow B$  un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{K}$ . Les morphismes de fibrés bijectifs sur les fibres  $\xi \rightarrow \gamma_{s,k}^{\mathbb{K}}$  sont en correspondance bijective canonique avec les morphismes de fibrés  $\xi \rightarrow B \times \mathbb{K}^s$  qui sont injectifs dans les fibres.*  $\square$

En vue de cette discussion, le théorème de classification sera impliqué par le théorème de prolongement suivant.

**Théorème 2.26.** *Soit  $\xi \rightarrow B^n$  un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $A \subseteq B$  un fermé et  $A \subset U$  un voisinage ouvert de  $A$  dans  $B$ .*

*Soit  $F : \xi|_U \rightarrow U \times \mathbb{K}^s$  un morphisme de fibrés injectif dans les fibres. Si  $s \geq k + n$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , respectivement  $2(s - k) + 1 \geq n$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , il existe un morphisme de fibrés  $\xi \rightarrow B \times \mathbb{K}^s$  qui est injectif dans les fibres et qui coïncide avec  $F$  au-dessus d'un voisinage de  $A$ .*

**Remarque 2.27.** *Il est utile de discuter la stratégie de preuve de ce théorème avant d'en donner les détails. Le point clé sera de démontrer le théorème localement sur  $B$ . Le fait qu'il soit formulé de façon relative, non pas comme un problème d'existence de morphismes définis au-dessus de  $B$ , mais comme un problème d'extension à  $B$  de morphismes déjà définis au-dessus d'un fermé arbitraire  $A$ , fait que la version locale se globalisera par un raisonnement purement formel. Ce schéma est fréquent en topologie algébrique. Le lecteur est invité à contempler le potentiel des énoncés formulés de manière relative : alors même qu'ils sont d'apparence plus lourde, leur efficacité est incomparablement plus grande que celle des versions "absolues". [Comparer aussi avec la discussion du 2.2.11 dans le livre de Hirsch.]*

*Nous allons rencontrer une situation similaire avec la définition des groupes d'homotopie relatifs, ou encore de groupes de (co)homologie relative. Les invariants d'intérêt central sont les invariants absolus, mais le fait de définir des invariants relatifs permet de mettre en place des raisonnements inductifs pour calculer les invariants absolus.*

*Démonstration du Théorème 2.26.*

*Étape 1 : l'on démontre le théorème pour un fibré  $\xi$  trivial.*

Notons à ce propos que la donnée d'une application  $B \times \mathbb{K}^k \rightarrow B \times \mathbb{K}^s$  injective dans les fibres équivaut à la donnée d'une application

$$B \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}.$$

En effet, une famille d'applications linéaires de rang maximal  $\mathbb{K}^k \hookrightarrow \mathbb{K}^s$  indexée par  $B$  est la même chose qu'une famille de  $k$ -repères dans  $\mathbb{K}^s$  indexée par  $B$ .

Soit  $A \subset B$  un fermé. Nous souhaitons montrer que toute application  $A \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}$  définie sur un voisinage  $U$  de  $A$  s'étend en une application  $B \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}$  pour  $s \geq k + n$  dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , respectivement pour  $2(s - k) + 1 \geq n$  dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . (Notons au passage que ceci démontrera  $\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{K}}) = 0$  pour  $1 \leq i < s - k$  dans le cas réel et pour  $1 \leq i < 2(s - k) + 1$  dans le cas complexe.)

Nous regardons  $V_{s,k}^{\mathbb{K}} \subset L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$  comme l'ouvert constitué des applications linéaires de rang maximal égal à  $k$ . Ainsi

$$V_{s,k}^{\mathbb{K}} = L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s) \setminus \bigcup_{\rho=0}^{k-1} Z_{\rho},$$

avec

$$Z_{\rho} \subset L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$$

le sous-espace des applications linéaires de rang égal à  $\rho \in \{0, \dots, k-1\}$ .

*Affirmation* :  $Z_{\rho} \subset L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$  est une sous-variété de codimension  $(s - \rho)(k - \rho)$ .

Cette affirmation démontre le théorème dans ce cadre. En effet, soit  $f : U \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}$  donnée. Puisque  $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^s)$  est contractile l'on peut étendre  $f$  après une éventuelle restriction à un voisinage de  $A$  dans  $U$  à une application  $\tilde{f} : B \rightarrow L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$ . Par le théorème de transversalité 2.17 (noter la formulation relative de ce dernier!), l'on trouve  $\bar{f} : B \rightarrow L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$  dont le germe en  $A$  est donné par  $f$  et telle que  $\bar{f}$  est simultanément transverse à tous les  $Z_{\rho}$ ,  $\rho = 0, \dots, k-1$ . Dans le cas réel nous avons

$$\min_{\rho} \text{codim}_{\mathbb{R}} Z_{\rho} = s - k + 1 > n = \dim B,$$

et dans le cas complexe nous avons

$$\min_{\rho} \text{codim}_{\mathbb{R}} Z_{\rho} = 2(s - k + 1) > n = \dim B.$$

La condition de transversalité équivaut dans les deux cas à ce que  $\text{im}(\bar{f}) \cap Z_{\rho} = \emptyset$  pour tout  $\rho$ , ou encore

$$\text{im}(\bar{f}) \subset V_{s,k}^{\mathbb{K}}.$$

Ainsi  $\bar{f}$  fournit l'extension souhaitée.

*Démonstration de l'affirmation.* Soit  $T \in Z_{\rho}$ . Au voisinage de  $T$ , tout élément  $S$  de  $Z_{\rho}$  est déterminé par

- son noyau, qui est un sous-espace de  $\mathbb{K}^k$  de dimension  $k - \rho$ , proche de  $\ker T$  ;
- son image, qui est un sous-espace de  $\mathbb{K}^s$  de dimension  $\rho$ , proche de  $\text{im } T$  ;
- le comportement de  $S$  sur un supplémentaire de  $\ker S$ , que l'on peut choisir comme étant donné par un supplémentaire fixé de  $\ker T$ , à valeurs dans cette image.

En suivant [Hirsch, p. 78], considérons deux applications linéaires

$$\mathbb{K}^{\rho} \xrightarrow{i} \mathbb{K}^s \xrightarrow{p} \mathbb{K}^{\rho}$$

telles que  $i$  est injective et  $\text{im } i$  est un supplémentaire de  $\ker T$ ,  $p$  est surjective et  $\ker p$  est un supplémentaire de  $\text{im } T$  (Figure 4). Soit  $\mathcal{N}(T) \subset Z_{\rho}$  un voisinage assez petit de  $T$ . L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &\rightarrow G_{k,k-\rho}^{\mathbb{K}} \times \text{GL}_{\rho}(\mathbb{K}) \times G_{s,\rho}^{\mathbb{K}}, \\ S &\mapsto (\ker S, pSi, \text{im } S) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme sur un ouvert du but. Son inverse est de classe  $C^{\infty}$  (vérification directe) et réalise un plongement ouvert à valeurs dans  $Z_{\rho}$ , qui est donc une paramétrisation locale de  $Z_{\rho}$ . Ainsi  $Z_{\rho}$  est une sous-variété de  $L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$ . Puisque

$$\dim_{\mathbb{K}} G_{k,k-\rho}^{\mathbb{K}} \times \text{GL}_{\rho}(\mathbb{K}) \times G_{s,\rho}^{\mathbb{K}} = (k - \rho)\rho + \rho^2 + \rho(s - \rho),$$

l'on déduit

$$\text{codim}_{\mathbb{K}} Z_{\rho} = (s - \rho)(k - \rho).$$

Ainsi la codimension de  $Z_{\rho}$  décroît avec  $\rho$  et la codimension minimale est celle de  $Z_{k-1}$ , égale à  $n - k + 1$  (sur  $\mathbb{K}$ ).

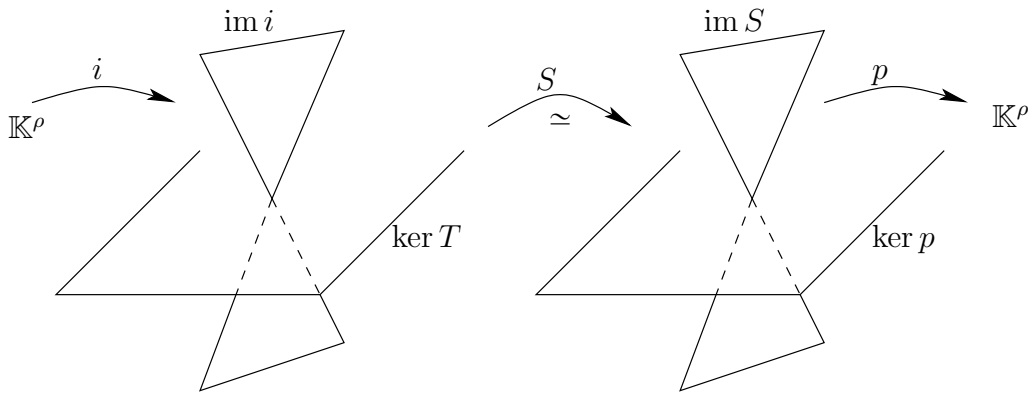


FIGURE 4

*Étape 2 : l'on démontre le théorème dans le cas général.*

Soit  $\{X_i\}$  un recouvrement dénombrable fermé de  $B$  tel que  $\xi$  soit trivial sur un voisinage de  $X_i$  pour tout  $i$ . L'on construit par récurrence

sur  $p \geq 1$  une extension  $F_p$  de  $F|_{A \cap \bigcup_{i=1}^p X_i}$  à un voisinage de  $\bigcup_{i=1}^p X_i$  qui coïncide avec  $F$  sur un voisinage de  $A \cap \bigcup_{i=1}^p X_i$ .

Pour  $p = 1$ , ceci découle de l'étape 1 appliquée à un voisinage de  $X_1$  et au fermé  $A \cap X_1$ .

Supposons maintenant avoir construit  $F_p$ . Nous construisons  $F_{p+1}$  de la manière suivante. L'étape 1 appliquée à un voisinage de  $X_{p+1}$  et au fermé  $(A \cup \bigcup_{i=1}^p X_i) \cap X_{p+1}$  fournit une application  $g$  définie au voisinage de  $X_{p+1}$  qui se recolle à l'application  $F_p$  par construction. Ensemble, elles fournissent l'application  $F_{p+1}$  recherchée.  $\square$

*Démonstration du théorème 2.23.* Nous donnons la preuve dans le cas réel  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , le cas complexe  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  étant en tout point analogue.

Pour tout  $s \geq k+n$  l'application  $[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \rightarrow \mathcal{Vect}_k^{\mathbb{R}}(B)$  est surjective. En effet, il suffit d'appliquer le Théorème de prolongement 2.26 avec  $A = \emptyset$  pour trouver un morphisme de fibrés  $F : \xi \rightarrow B \times \mathbb{R}^s$  injectif dans les fibres. En posant  $f : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$ ,  $f(p) = F(\xi_p)$  l'on aura  $\xi \simeq f^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$ .

Soit maintenant  $s > k+n$  et montrons que deux telles applications classifiantes  $f_0, f_1 : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$  sont homotopes. L'on fixe des isomorphismes  $\xi \simeq f_i^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$ ,  $i = 0, 1$ , qui déterminent des morphismes de fibrés  $F_i : \xi \rightarrow B \times \mathbb{R}^s$ ,  $i = 0, 1$  injectifs dans les fibres. L'on applique maintenant le Théorème de prolongement 2.26 au fibré  $\text{pr}_1^* \xi \rightarrow B \times [0, 1]$ , avec  $A = B \times \{0\} \cup B \times \{1\}$  et  $F$  donné par  $F_i$  au voisinage de  $B \times \{i\}$ ,  $i = 0, 1$  et l'on trouve une extension  $F' : \text{pr}_1^* \xi \rightarrow B \times [0, 1] \times \mathbb{R}^s$  qui est un morphisme de fibrés injectif dans les fibres. L'application  $f : B \times [0, 1] \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$  donnée par  $f(p, t) = F'((\text{pr}_1^* \xi)_{p,t})$  réalise alors une homotopie entre  $f_0$  et  $f_1$ .

Finalement, il est clair que l'inclusion  $i : G_{s,k}^{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{s',k}^{\mathbb{R}}$ ,  $s' \geq s$  rend commutatif le diagramme de l'énoncé puisque  $i^* \gamma_{s',k}^{\mathbb{R}} = \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$ . Puisque les deux flèches verticales de ce diagramme sont des bijections pour  $s > k+n$ , il s'ensuit que la flèche induite  $[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \rightarrow [B, G_{s',k}^{\mathbb{R}}]$  est aussi une bijection.  $\square$

**Remarque 2.28.** *Il s'ensuit de notre preuve que*

$$\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{R}}) = 0, \quad 1 \leq i < s - k$$

et

$$\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{C}}) = 0, \quad 1 \leq i < 2(s - k) + 1.$$

*En effet, soit  $f : (S^i, *) \rightarrow (V_{s,k}^{\mathbb{K}}, *)$  une application continue. Par le Théorème de prolongement 2.26 appliqué au fibré trivial de rang  $k$  sur  $B = D^{i+1}$ , la boule de dimension  $i+1$ , avec  $A = S^i$  et le morphisme de fibrés injectif dans les fibres  $S^i \times \mathbb{K}^k \rightarrow S^i \times \mathbb{K}^s$  défini par  $f$ , fournit une extension de ce dernier à  $B$ , ce qui équivaut à une extension de  $f$  à la boule. Ainsi  $f$  est homotope à l'application constante.*

Les dimensions  $s - k$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $2(s - k) + 1$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sont les premières dans lesquelles des groupes d'homotopie non-triviaux apparaissent. En effet, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 2.29.** *L'on a*

$$\pi_{s-k}(V_{s,k}^{\mathbb{R}}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & s - k \text{ pair ou } k = 1, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & s - k \text{ impair et } k > 1, \end{cases}$$

et

$$\pi_{2(s-k)+1}(V_{s,k}^{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}.$$

□

Pour la preuve, le lecteur pourra consulter [Steenrod, 25.6].

**Remarque.** Nous obtenons en particulier

$$\pi_i(V_k^{\mathbb{K}}) = 0, \quad i \geq 1.$$

Ceci implique en particulier que  $V_k^{\mathbb{K}}$  est contractile (Théorème de Whitehead, cf. la discussion de l'Annexe ??).

**Remarque.** Le théorème de classification des fibrés réduit la théorie des fibrés vectoriels à une brache de la théorie de l'homotopie. Le théorème d'approximation lisse discuté plus haut a en particulier comme conséquence le fait suivant. Pour l'énoncer, introduisons la terminologie suivante : un fibré vectoriel au-dessus d'une variété lisse est dit *de classe  $C^r$* ,  $r \geq 0$  s'il est défini par un 1-cocycle  $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  de classe  $C^r$ .

**Proposition 2.30.** *Soit  $B$  une variété lisse. Tout fibré de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$  possède une structure de fibré de classe  $C^\infty$  qui lui est isomorphe dans la catégorie des fibrés de classe  $C^r$ . Cette structure de fibré  $C^\infty$  est unique à isomorphisme près.* □

Le lecteur est invité à démontrer ce résultat (cf. aussi [Hirsch 4.3.5]).

**Remarque 2.31.** *Considérons de la bijection*

$$[B, G_k^{\mathbb{K}}] \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(B), \quad [f] \mapsto f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}.$$

Se pose la question d'associer aux fibrés vectoriels des invariants de nature algébrique. Une manière cohérente de le faire est d'appliquer la stratégie suivante : soit  $\alpha \in H^*(G_k^{\mathbb{K}})$  une classe de cohomologie fixée (cf. la discussion de la cohomologie dans les chapitres suivants). L'on définit

$$\alpha(\xi) = f^* \alpha \in H^*(B),$$

où  $f^* : H^*(G_k^{\mathbb{K}}) \rightarrow H^*(B)$  est l'application induite en cohomologie. La classe  $f^* \alpha$  est bien déterminée puisque l'application  $f^*$  induite en cohomologie ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$ . Pour toute application  $h : B' \rightarrow B$  l'on a alors

$$\alpha(h^* \xi) = h^* \alpha(\xi).$$

En effet, si  $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$  est une application classifiante pour  $\xi$ , alors  $f \circ h : B' \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$  est une application classifiante pour  $h^*\xi$ , et les applications induites en cohomologie vérifient  $(f \circ h)^* = h^*f^*$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 h^*\xi = (f \circ h)^*\gamma_k^{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \xi = f^*\gamma_k^{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \gamma_k^{\mathbb{K}} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B' & \xrightarrow{h} & B & \xrightarrow{f} & G_k^{\mathbb{K}}
 \end{array}$$

L'on appelle  $\alpha(\xi)$  la valeur de la classe caractéristique déterminée par  $\alpha$  sur le fibré  $\xi$ .

Bien évidemment, la portée de cette stratégie pour distinguer des classes d'isomorphisme de fibrés dépend en premier lieu de la richesse des groupes de cohomologie  $H^*(G_k^{\mathbb{K}})$  des grassmanniennes. La question du calcul de ces groupes apparaît comme fondamentale.

**2.4. Groupes d'homotopie.** Les groupes d'homotopie jouent un rôle fondamental en topologie algébrique. En vue de la preuve du théorème de prolongement 2.26, ils peuvent notamment être interprétés comme fournissant des obstructions de nature algébrique à des problèmes de prolongement d'applications dont la source est donnée.

**Définition 2.32.** Soit  $n \geq 0$  un entier. Choisissons un point base  $*$  dans  $S^n$ . Soit  $X$  un espace topologique avec point base  $x_0$ . On note

$$\pi_n(X, x_0)$$

l'ensemble des classes d'homotopie d'applications d'espaces topologiques à point base  $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ . On appelle  $\pi_n(X, x_0)$  le  $n$ -ème groupe d'homotopie de  $X$  (basé en  $x_0$ ).

À titre d'exemple, en vue du fait que  $S^0$  est l'ensemble constitué de deux points,  $\pi_0(X, x_0)$  est l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ . C'est un ensemble à point base, donné par la composante connexe de  $x_0$ . Les ensembles  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$  ne dépendent évidemment que de la composante connexe par arcs de  $x_0$  dans  $X$ .

Les ensembles  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$  portent une structure de groupe. Lorsque  $n = 1$ , c'est la structure de groupe bien connue sur le groupe fondamental donnée par la concaténation des lacets. Pour décrire la structure de groupe lorsque  $n \geq 2$  il est utile de voir  $\pi_n(X, x_0)$  comme ensemble de classes d'homotopie d'applications continues

$$(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0),$$

avec  $I^n = [0, 1]^n$  le cube unité dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\partial I^n$  son bord. Étant données deux classes de telles applications représentées par  $f$  et  $g$  l'on définit

$$(2.1) \quad (f \cdot g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

De façon visuelle, la loi de composition est décrite par la Figure 5 ci-dessous.

$$\boxed{f} \cdot \boxed{g} = \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array}}$$

FIGURE 5. Loi de composition dans  $\pi_2(X, x_0)$

**Proposition 2.33.** La loi de composition (2.1) ci-dessus définit une structure de groupe sur  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$ . Les groupes  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 2$  sont commutatifs.

*Démonstration.* L'énoncé est bien connu dans le cas du groupe fondamental  $n = 1$ . Lorsque  $n \geq 2$ , l'inverse de  $[f]$  est représenté par



$\bar{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ . La commutativité de la multiplication est démontrée en utilisant l'homotopie décrite par la Figure 6 ci-dessous.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline x_0 & g \\ \hline f & x_0 \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline g & x_0 \\ \hline x_0 & f \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}$$

FIGURE 6. Commutativité de  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 2$

□

2.4.1. *Homotopie libre.* Le groupe  $\pi_1(X, x_0)$  agit sur  $\pi_n(X, x_0)$  par des automorphismes de groupes de la manière suivante. Soit  $\gamma : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$  un lacet à point base en  $x_0$  et  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  un représentant de classe d'homotopie dans  $\pi_n(X, x_0)$ . Soit  $I_{1/2}^n \subset I^n$  le cube obtenu en appliquant à  $I^n$  l'homothétie  $h_{1/2}$  de rapport  $1/2$  et dont le centre est le barycentre de  $I^n$ . On choisit un homéomorphisme  $I^n \setminus \text{int } I_{1/2}^n \simeq \partial I^n \times [0, 1]$  avec  $\partial I^n \simeq \partial I^n \times \{0\}$  et  $\partial I_{1/2}^n \simeq \partial I^n \times \{1\}$  et l'on définit  $\gamma \cdot f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  par

$$(\gamma \cdot f)(t) = \begin{cases} \gamma(\tau), & t = (t', \tau) \in I^n \setminus \text{int } I_{1/2}^n \simeq \partial I^n \times [0, 1], \\ f(h_{1/2}^{-1}(t)), & t \in I_{1/2}^n \end{cases}$$

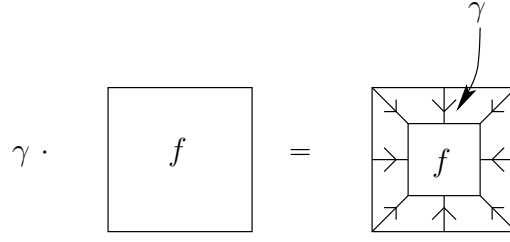
De façon heuristique, l'on met en évidence à l'intérieur de  $I^n$  un cube plus petit sur lequel on garde  $f$  (modulo un changement d'échelle), et l'on insère sur le collier extérieur le lacet  $\gamma$  le long des rayons, paramétré depuis  $\partial I^n$  vers le bord du cube intérieur (Figure 7). La classe d'homotopie de  $\sigma \cdot f$  ne dépend que des classes d'homotopie de  $\gamma$  et  $f$ , et ceci définit un homomorphisme de groupes

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(X, x_0)), \quad n \geq 1.$$

Lorsque  $n = 1$  ceci n'est rien d'autre que l'action de  $\pi_1(X, x_0)$  sur lui-même par des automorphismes intérieurs

$$g \mapsto (h \mapsto ghg^{-1}).$$

**Remarque.** Soit  $X$  connexe par arcs. La même formule définit une action du groupoïde fondamental de  $X$  sur l'ensemble  $\{\pi_n(X, x) : x \in X\}$ . Rappelons qu'un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Le groupoïde fondamental a comme objets les points de  $X$ . L'ensemble des morphismes de  $x$  à  $y$ , noté  $\pi_1(X, y, x)$ , est par définition l'ensemble des classes d'homotopie à extrémités fixées de chemins continus de  $y$  vers  $x$ . La composition des morphismes est donnée par la composition de chemins. Pour

FIGURE 7. Action de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$ 

$[\gamma] \in \pi_1(X, x, y)$  et  $[f] \in \pi_n(X, x)$ , l'on a  $[\gamma] \cdot [f] \in \pi_n(X, y)$  et l'application  $[\gamma] \cdot : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, y)$  est un isomorphisme de groupes. L'on obtient donc une application

$$\pi_1(X, y, x) \rightarrow \text{Iso}(\pi_n(X, x), \pi_n(X, y)).$$

L'on note  $\{\pi_n(X)\}$  l'ensemble  $\{\pi_n(X, x) : x \in X\}$  muni de cette action du groupoïde fondamental et on l'appelle *le système local de fibre  $\pi_n(X, x)$  défini par l'action de  $\pi_1$* .

**Proposition 2.34.** *Soit  $X$  un espace connexe par arcs. L'application canonique  $\mathcal{L} : \pi_n(X, x_0) \rightarrow [S^n, X]$  qui associe à une classe d'homotopie à point base sa classe d'homotopie libre descend en une bijection*

$$\bar{\mathcal{L}} : \pi_n(X, x_0)/\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} [S^n, X].$$

*Démonstration.* Il est clair par définition que l'application  $\mathcal{L}$  descend au quotient :  $\gamma \cdot f$  est librement homotope à  $f$  par un chemin d'applications  $(I^n, \partial I^n) \mapsto (X, \gamma(t))$ ,  $t \in [0, 1]$  (on retracte par déformation le cube  $I^n$  sur  $I_{1/2}^n$ ).

L'application  $\mathcal{L}$  est surjective : étant donnée  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x)$ , l'on choisit un chemin  $\gamma$  de  $x_0$  à  $x$ . L'argument précédent montre que  $f$  est homotope librement à  $\gamma \cdot f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ .

L'application  $\bar{\mathcal{L}}$  est injective : soient  $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$  deux éléments qui sont homotopes librement par une homotopie  $F : I^n \times [0, 1] \rightarrow X$ ,  $F(x, t) = F_t(x)$  telle que  $F_0 = f$ ,  $F_1 = g$  et  $F_t|_{\partial I^n} = \text{cte.}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On note  $F_t|_{\partial I^n} = \gamma(t)$ , de sorte que  $\gamma : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$  est un lacet basé en  $x_0$ . L'homotopie

$$\bar{F}_t = \gamma|_{[0, t]} \cdot F_t, \quad t \in [0, 1]$$

est alors une homotopie d'applications  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  telle que  $\bar{F}_0 = f$  et  $\bar{F}_1 = \gamma \cdot g$ . (Intuitivement, l'on fait "glisser" le point base de  $F_t$  vers  $x_0$  le long de  $\gamma$ .) Ainsi  $[f]$  et  $[g]$  définissent le même élément dans le quotient  $\pi_n(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)$ .  $\square$

2.4.2. *Suite exacte d'homotopie d'une fibration. Groupes d'homotopie relatifs.* Un outil clé pour calculer les groupes d'homotopie est la suite exacte longue d'une fibration. Celle-ci est un cas particulier de la suite exacte longue d'une paire, qui fait intervenir les groupes d'homotopie relatifs.

GROUPES D'HOMOTOPIE RELATIFS, SUITE EXACTE D'UNE PAIRE EN HOMOTOPIE. Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subset X$  un sous-espace. Choisissons un point base  $x_0 \in A$ , que l'on regarde aussi comme point base pour  $X$ . Une question importante est celle de comprendre les morphismes induits par l'inclusion

$$\pi_n(A, x_0) \subset \pi_n(X, x_0), \quad n \geq 0.$$

Une réponse structurée est donnée par le fait de définir les *groupes d'homotopie relatifs*. Soit  $n \geq 1$ . Décomposons  $\partial I^n$  comme union de la *face initiale*  $I^{n-1} = \{t_n = 0\}$  et de l'union des autres faces qui constituent  $\partial I^n$ , que l'on note  $J^{n-1}$ . Ainsi

$$I^{n-1} \cup J^{n-1} = \partial I^n, \quad I^{n-1} \cap J^{n-1} = \partial I^{n-1}.$$

L'on note

$$\pi_n(X, A, x_0)$$

l'ensemble des classes d'homotopies d'applications

$$f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0).$$

Des arguments similaires en tout point à ceux de la section précédente montrent que  $\pi_n(X, A, x_0)$  porte une structure de groupe pour  $n \geq 2$ , commutative pour  $n \geq 3$ . L'ensemble  $\pi_1(X, A, x_0)$  ne possède pas de structure de groupe, mais il possède un point base donné par la classe d'homotopie de l'application constante égale à  $x_0$ . Un point de cet ensemble est une classe d'homotopie de chemins dans  $X$  qui commencent dans  $A$  et qui aboutissent à  $x_0$ .

Pour toute application de paires munies de points bases  $(X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  l'on a un morphisme induit  $\pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ . En particulier, l'inclusion  $(X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$  induit un morphisme

$$\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0), \quad n \geq 1.$$

Par ailleurs, l'on a un morphisme canonique

$$\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0), \quad [f] \mapsto [f|_{I^{n-1}}], \quad n \geq 1.$$

**Proposition 2.35.** *Pour toute paire  $(X, A)$  avec point base  $x_0 \in A$ , les morphismes induits par les inclusions et le morphisme de bord  $\partial$*

*s'inèrent dans une suite exacte longue*

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0). \end{aligned}$$

□

La démonstration de cette proposition consiste en une vérification directe.

Un mot d'explication est nécessaire concernant la partie finale de la suite exacte. En effet, les trois derniers termes ne portent pas de structure de groupe, mais sont seulement des ensembles à point base. Ainsi, la partie finale de la suite exacte

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0)$$

doit être interprétée comme une suite exacte d'ensembles avec point base au sens suivant.

**Définition 2.36.** *Une suite*

$$(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$$

*d'applications entre ensembles à point base est dite exacte en  $(B, b)$  si*

$$\text{im}(f) = g^{-1}(c).$$

L'exactitude de la suite d'homotopie en  $\pi_1(X, A, x_0)$  signifie que les classes d'homotopie de chemins commençant sur  $A$  et aboutissant à  $x_0$  qui sont représentées par des lacets dans  $X$  (basés en  $x_0$ ) sont exactement celles pour lesquelles l'origine du chemin appartient à la composante connexe par arcs de  $x_0$  dans  $A$ . L'exactitude de la suite d'homotopie en  $\pi_0(A, x_0)$  signifie que les composantes connexes par arcs de  $A$  sur lesquelles peut se trouver l'origine d'un chemin dans  $X$  qui aboutit à  $x_0$  sont exactement celles qui sont incluses dans la composante connexe par arcs de  $x_0$  dans  $X$ . Ces deux affirmations sont tautologiques.

**SUITE EXACTE HOMOTOPIQUE D'UNE FIBRATION.** Soit  $E \xrightarrow{p} B$  une fibration localement triviale. L'on choisit des points bases  $b_0 \in B$  et  $x_0 \in E_{b_0}$ . L'on note  $F = E_{b_0}$ .

**Proposition 2.37.** *La projection induit des isomorphismes*

$$p_* : \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0), \quad n \geq 1.$$

Lorsque  $n = 1$  l'on doit interpréter l'énoncé comme affirmant le fait que la projection induit une bijection.

La preuve de ce résultat utilise une propriété clé des fibrations, à savoir *la propriété de relèvement des homotopies*.

**Proposition 2.38.** Soit  $E \xrightarrow{p} B$  une fibration localement triviale. Pour toute homotopie  $h = (h_t) : X \times [0, 1] \rightarrow B$  et tout relèvement  $\tilde{h}_0 : X \times \{0\} \rightarrow E$  de  $h_0 = h(\cdot, 0)$  à  $E$ , de sorte que  $p\tilde{h}_0 = h_0$ , il existe un relèvement  $\tilde{h} : X \times [0, 1] \rightarrow E$ ,  $p\tilde{h} = h$  qui coïncide avec  $\tilde{h}_0$  sur  $X \times \{0\}$ .

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

*Démonstration.* Pour simplifier, faisons la preuve dans le cas d'une fibration localement triviale lisse, tous les espaces en question étant des variétés de dimension finie compactes. L'on choisit sur  $E$  une connexion, c'est-à-dire une distribution de rang égal à  $\dim B$  transverse aux fibres. Le transport parallèle est globalement défini puisque les fibres sont compactes et fournit un relèvement de tous les chemins  $h(x, \cdot)$ , uniquement déterminé une fois que la condition initiale  $\tilde{h}_0(x)$  est spécifiée, qui dépend de  $x$  avec le même degré de régularité que le relèvement  $\tilde{h}_0$  et que l'homotopie  $h$ .

Lorsque les fibres ne sont pas compactes il faut choisir la connexion avec plus de soin, de sorte que le transport parallèle soit propre.

Dans le cas général des espaces topologiques la raisonnement est fait localement sur des petits ouverts de trivialisations et l'on doit supposer que la base  $B$  est paracompacte (ce qui est une hypothèse par défaut dans le cas des variétés). Si l'on souhaite avoir la propriété de relèvement des homotopies uniquement pour les CW-complexes (voir plus bas pour la définition), l'hypothèse de paracompacité sur la base n'est pas nécessaire. Le lecteur trouvera sans peine en cas de besoin les détails dans la littérature.  $\square$

Dans la pratique l'on utilise (encore une fois!) une *version relative* de la propriété de relèvement des homotopies. Par définition, une application  $E \xrightarrow{p} B$  satisfait la *propriété de relèvement des homotopies pour une paire*  $(X, A)$  si, pour toute homotopie  $h = (h_t) : X \times [0, 1] \rightarrow B$  et pour tout relèvement  $\tilde{h}_{0,A} : X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \rightarrow E$  tel que  $p\tilde{h}_{0,A} = h|_{X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]}$ , il existe un relèvement  $\tilde{h} : X \times [0, 1] \rightarrow E$  tel que  $p\tilde{h} = h$  qui prolonge  $\tilde{h}_{0,A}$ .

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{h}_{0,A}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

*Démonstration de la Proposition 2.37.* Nous utilisons la propriété de relèvement des homotopies pour les cubes  $I^n$ ,  $n \geq 0$ . Puisque la paire  $(I^n \times I, I^n \times \{0\})$  est homéomorphe à la paire  $(I^n \times I, I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I)$ , l'on déduit de la Proposition 2.38 que la propriété de relèvement des homotopies est satisfaite pour les paires  $(I^n \times I, I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I)$ ,  $n \geq 0$ . Plus généralement, la propriété de relèvement des homotopies est satisfaite pour toute paire consistant de  $I^n \times I$  et du bord de ce cube privé de l'intérieur de l'une quelconque de ses faces.

$p_*$  EST SURJECTIVE. Soit  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ . L'application constante égale à  $x_0$  relève cette application sur  $J^{n-1} = I^{n-1} \times \{1\} \cup (\partial I^{n-1}) \times I$ . Ceci n'est rien d'autre que  $\partial I^n$  privé de l'intérieur de sa face initiale  $I^{n-1}$  et, par ce qui précède, nous obtenons un relèvement  $\tilde{f}$  sur  $I^n$ . Puisque  $p\tilde{f} = f$  et  $f|_{\partial I^n} = b_0$ , l'on a  $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$ .

$p_*$  EST INJECTIVE. Soient  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$  telles que  $p\tilde{f}_0$  et  $p\tilde{f}_1$  soient homotopes. Notons  $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (B, b_0)$  une telle homotopie. L'on a un relèvement de  $G$  sur  $I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup J^{n-1} \times I$ , qui n'est rien d'autre que le bord du cube  $I^n \times I$  privé de l'intérieur de la face  $I^{n-1} \times I$ , donné par  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ , et respectivement  $x_0$ . Nous obtenons alors un relèvement de  $G$  à  $I^n \times I$ , qui réalise une homotopie entre  $\tilde{f}_0$  et  $\tilde{f}_1$ .  $\square$

Comme conséquence directe de la Proposition 2.37 et de la suite exacte longue d'une paire en homotopie appliquée à la paire  $(E, F)$ , nous obtenons le résultat fondamental suivant.

**Théorème 2.39.** *Soit  $E \xrightarrow{p} B$  une fibration localement triviale avec points bases  $b_0 \in B$  et  $x_0 \in E_{b_0}$ . L'on note  $F = E_{b_0}$  et  $i : F \hookrightarrow E$  l'inclusion. L'on a une suite exacte longue en homotopie*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(E, x_0) \rightarrow \pi_0(B, b_0).$$

$\square$

Le théorème affirme en particulier que la fin de la suite exacte longue de la paire  $(E, F)$  peut être complétée par l'ensemble à point base  $\pi_0(B, b_0)$ , et aussi que la composition  $\pi_1(E, x_0) \rightarrow \pi_1(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$  coïncide avec le morphisme induit par la projection au niveau du groupe fondamental  $\pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$ .

La description du morphisme de bord

$$\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0), \quad n \geq 1$$

est implicite dans la preuve de la Proposition 2.37 : étant donnée une classe  $[f] \in \pi_n(B, b_0)$  représentée par une application  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow$

$(B, b_0)$ , l'on la relève en une application  $\tilde{f} : I^{n-1} \times I$  constante égale à  $x_0$  sur  $J^{n-1} = I^{n-1} \times \{1\} \cup (\partial I^{n-1}) \times I$ . L'on a alors  $\tilde{f}(I^{n-1}) \subset F$  puisque  $p\tilde{f} = f$  et l'on pose

$$\delta[f] = [f|_{\partial I^{n-1}}].$$

**Exercice.** Utiliser la propriété de relèvement des homotopies pour montrer que  $\partial$  est bien définie, et vérifier directement que c'est un morphisme de groupes pour  $n \geq 2$ .

**Exemple 2.40.** Nous avons vu précédemment que  $\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{R}}) = 0$  pour  $1 \leq i < s - k$  et  $\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{C}}) = 0$  pour  $1 \leq i < 2(s - k) + 1$ . Ceci implique

$$\pi_i(V_k^{\mathbb{K}}) = 0, \quad \pi_i(V_k^{\mathbb{C}}) = 0, \quad i \geq 1.$$

Considérons maintenant pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  les fibrations localement triviales

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}) & \hookrightarrow & V_k^{\mathbb{K}} \\ & & \downarrow \\ & & G_k^{\mathbb{K}} \end{array}$$

La suite exacte d'homotopie pour chacune de ces deux fibrations montre en particulier les isomorphismes

$$\pi_n(G_k^{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})), \quad n \geq 1.$$

**Exercice 4.** Montrer que les isomorphismes  $\pi_1(G_k^{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\cong} \pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  sont compatibles avec la structure de groupe naturelle de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ .

Montrer que les isomorphismes  $\pi_n(G_k^{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ ,  $n \geq 2$  sont compatibles avec les actions respectives de  $\pi_1(G_k^{\mathbb{K}})$  et  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ .

Cet exercice montre que les descriptions des fibrés vectoriels sur les sphères obtenues dans les sections 2.1 et 2.3.2 sont équivalentes, en prenant en compte la Proposition 2.34.

### 3. CLASSES CARACTÉRISTIQUES

Les classes caractéristiques d'un fibré vectoriel mesurent son défaut de trivialité. Ce sont des classes de cohomologie sur la base. Nous expliquons dans ce chapitre deux approches de cette théorie, l'une axiomatique, particulièrement utile pour effectuer des calculs, l'autre géométrique, via la théorie de l'obstruction.

**3.1. Le point de vue axiomatique.** Ce point de vue a déjà été préfiguré dans la Remarque 2.31 : en vue de la bijection naturelle

$$\begin{aligned} [B, G_k^{\mathbb{K}}] &\xrightarrow{\sim} \mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(B), \\ [f] &\longmapsto f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

toute classe de cohomologie  $\alpha \in H^*(G_k^{\mathbb{K}})$  détermine pour tout fibré  $\xi \simeq f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}$  de rang  $k$  sur une base  $B$  une classe de cohomologie  $\alpha(\xi) = f^* \alpha \in H^*(B)$ . L'application  $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$  telle que  $\xi \simeq f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}$  est dite *application classifiante*. Elle est uniquement déterminée à homotopie près. La question du calcul de la cohomologie des Grassmanniennes devient par conséquent centrale.

Pour décrire la structure de la cohomologie des Grassmanniennes introduisons l'application

$$\mathbb{K}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{K}P^\infty = G_1^{\mathbb{K}} \times \cdots \times G_1^{\mathbb{K}} \xrightarrow{f} G_k^{\mathbb{K}},$$

dont la source est un produit de  $k$  copies de  $\mathbb{K}P^\infty$ , définie comme suit. Pour tout  $s \geq 1$  l'on a un plongement

$$(\mathbb{K}^s)^{\times k} \rightarrow \mathbb{K}^{ks},$$

$$((x_1^1, \dots, x_1^k), \dots, (x_k^1, \dots, x_k^k)) \mapsto (x_1^1, \dots, x_k^1, x_1^2, \dots, x_k^2, \dots, x_1^k, \dots, x_k^k).$$

Celui-ci induit un plongement

$$(\mathbb{K}P^{s-1})^{\times k} \rightarrow G_{ks,k}^{\mathbb{K}}, \quad (d_1, \dots, d_k) \mapsto d_1 \oplus \cdots \oplus d_k$$

qui est compatible avec les inclusions  $\mathbb{K}P^{s'} \hookrightarrow \mathbb{K}P^{s''}$  et  $G_{s',k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow G_{s'',k}^{\mathbb{K}}$ ,  $s' \leq s''$  et induit à la limite le plongement

$$f : (\mathbb{K}P^\infty)^{\times k} \hookrightarrow G_k^{\mathbb{K}}.$$

Il est clair que

$$f^* \gamma_k^{\mathbb{K}} = p_1^* \gamma_1^{\mathbb{K}} \oplus \cdots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{K}}.$$

Rappelons, en vue de l'énoncé qui suit, que l'on a des isomorphismes d'anneaux gradués

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x], \quad |x| = 1$$

et

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[y], \quad |y| = 2.$$



**Remarque 3.1.** Dans ce dernier isomorphisme le générateur  $y$  est bien déterminé au signe près. En vue du fait que  $\pi_1(\mathbb{C}P^\infty) = 0$  l'on a aussi  $H_1(\mathbb{C}P^\infty) = 0$  et par conséquent  $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ . Dans  $H_2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  nous avons un générateur canonique donné par la classe fondamentale  $[\mathbb{C}P^1]$  d'une droite projective  $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^\infty$  munie de son orientation complexe.

**Convention.** L'on note  $y$  le générateur négatif de  $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ , déterminé par la relation

$$\langle y, [\mathbb{C}P^1] \rangle = -1.$$

Cette convention est issue du fait que nous souhaitons que  $y$  représente la première classe de Chern du fibré tautologique  $\gamma_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  (cf. plus bas). Or la restriction de ce dernier à  $\mathbb{C}P^1$  coïncide avec  $\mathcal{O}(-1)$ . Nous verrons plus bas que cette convention assure que la première classe de Chern  $c_1(\mathcal{O}(k))$  du fibré holomorphe en droites  $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbb{C}P^1$  vérifie

$$\langle c_1(\mathcal{O}(k)), [\mathbb{C}P^1] \rangle = k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notons  $x_i = p_i^*x \in H^1((\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}/2)$  et  $y_i = p_i^*y \in H^2((\mathbb{C}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z})$ . L'on a alors des isomorphismes d'anneaux gradués

$$H^*((\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}/2) \simeq (H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2))^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k]$$

et

$$H^*((\mathbb{C}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}) \simeq (H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}))^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k].$$

**Théorème 3.2** (cohomologie des Grassmanniennes).

(i) La cohomologie à coefficients  $\mathbb{Z}/2$  de la grassmannienne réelle  $G_k^{\mathbb{R}}$  est isomorphe en tant qu'anneau gradué à un anneau de polynômes en  $k$  variables de degrés  $1, 2, \dots, k$ .

L'application  $f : (\mathbb{R}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$  induit en cohomologie à coefficients  $\mathbb{Z}/2$  une injection

$$f^* : H^*(G_k^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2) \hookrightarrow H^*((\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}/2)^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k], \quad |x_i| = 1.$$

L'image de  $f^*$  est l'anneau des polynômes symétriques  $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k]^{\mathfrak{S}_k}$  en les variables  $x_1, \dots, x_k$ .

(ii) La cohomologie à coefficients entiers de la grassmannienne complexe  $G_k^{\mathbb{C}}$  est isomorphe en tant qu'anneau gradué à un anneau de polynômes en  $k$  variables de degrés  $2, 4, \dots, 2k$ .

L'application  $f : (\mathbb{C}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{C}}$  induit en cohomologie à coefficients entiers une injection

$$f^* : H^*(G_k^{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^*((\mathbb{C}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z})^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k], \quad |y_i| = 2.$$

L'image de  $f^*$  est l'anneau des polynômes symétriques  $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k]^{\mathfrak{S}_k}$  en les variables  $y_1, \dots, y_k$ .  $\square$

Nous allons donner plus loin une démonstration de ce théorème basée sur le théorème de Leray-Hirsch appliqué à des fibrations appropriées impliquant les variétés de drapeaux.

Un point clé des énoncés ci-dessus est que l'application  $f^*$  fournit un système privilégié de générateurs pour la cohomologie des grassmanniennes réelle et complexe, à savoir les préimages des polynômes symétriques élémentaires. Il est bien connu que ces derniers constituent un système libre de générateurs pour l'algèbre des polynômes symétriques. Leurs préimages par  $f^*$  sont appelées *classes de Stiefel-Whitney universelles*, notées  $w_1, \dots, w_k$  (dans le cas réel), respectivement *classes de Chern universelles*, notées  $c_1, \dots, c_k$  (dans le cas complexe). Il est important à ce stade de réaliser qu'une algèbre de polynômes n'a pas de générateurs canoniquement définis. L'application  $f^*$  permet justement de mettre en évidence un système privilégié de générateurs pour la cohomologie des Grassmanniennes.

Ainsi

$$H^*(G_k^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[w_1, \dots, w_k], \quad |w_i| = i,$$

avec

$$f^*w_i = \sum \prod_{k_p \neq k_q} x_{k_1} \dots x_{k_i},$$

ou de manière plus explicite

$$f^*w_1 = x_1 + \dots + x_k,$$

$$f^*w_2 = \sum_{p \neq q} x_p x_q,$$

$$\vdots$$

$$f^*w_k = x_1 \dots x_k.$$

Aussi

$$H^*(G_k^{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k], \quad |c_i| = 2i,$$

avec

$$f^*c_i = \sum \prod_{k_p \neq k_q} y_{k_1} \dots y_{k_i},$$

ou de manière plus explicite

$$f^*c_1 = y_1 + \dots + y_k,$$

$$f^*c_2 = \sum_{p \neq q} y_p y_q,$$

$$\vdots$$

$$f^*c_k = y_1 \dots y_k.$$

**Remarque 3.3.** L'application  $f : (\mathbb{K}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$  est appelée aussi application de scindement (à coefficients  $\mathbb{Z}/2$  dans le cas réel, respectivement à coefficients entiers dans le cas complexe). De manière générale, étant donné un fibré  $\xi \rightarrow B$ , on appelle application de scindement à coefficients dans  $A$  une application  $f : B' \rightarrow B$  telle que  $f^*\xi$  est isomorphe à une somme directe de fibrés en droites et telle que l'application  $f^* : H^*(B; A) \rightarrow H^*(B'; A)$  induite en cohomologie à coefficients dans  $A$  est injective.

Tout fibré réel (au-dessus d'une base paracompacte) admet une application de scindement à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2$ , et tout fibré complexe admet une application de scindement à coefficients entiers. La construction est la suivante : étant donné  $\xi \rightarrow B$  de rang  $k$ , l'on considère la fibration localement triviale  $\mathbb{P}(\xi) \xrightarrow{p} B$  dont la fibre au-dessus d'un point  $b \in B$  est l'espace projectif  $\mathbb{P}(\xi_b)$ . Alors  $p^*\xi \simeq \eta \oplus \gamma$ , avec  $\eta$  de rang  $k-1$  et  $\gamma$  le fibré tautologique sur  $\mathbb{P}(\xi)$ , dont la restriction à chaque fibre  $\mathbb{P}(\xi)_b = \mathbb{P}(\xi_b)$  est le fibré tautologique sur le projectif.

$$\begin{array}{ccc} p^*\xi \simeq \eta \oplus \gamma & \longrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(\xi) & \xrightarrow{p} & B. \end{array}$$

L'on démontrera plus bas comme conséquence du théorème de Leray-Hirsch que l'application  $f^* : H^*(B; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(\mathbb{P}(\xi); \mathbb{Z}/2)$  est injective dans le cas réel, respectivement que  $f^* : H^*(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathbb{P}(\xi); \mathbb{Z})$  est injective dans le cas complexe. En itérant la construction pour  $\eta$  etc. l'on construit en  $k$  étapes une application de scindement pour  $\xi$ .

**Définition 3.4.** Soit  $\xi \rightarrow B$  un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$  une application classifiante. La  $i$ -ème classe de Stiefel-Whitney de  $\xi$ , notée  $w_i(\xi)$ , est définie comme

$$w_i(\xi) = f^*w_i \in H^i(B; \mathbb{Z}/2), \quad i = 1, \dots, k,$$

avec  $w_i$  la  $i$ -ème classe de Stiefel-Whitney universelle.

L'on pose par définition  $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}/2)$  et  $w_i(\xi) = 0 \in H^i(B; \mathbb{Z}/2)$  pour  $i > k$ .

La classe de Stiefel-Whitney totale  $w(\xi) \in \prod_{i \geq 0} H^i(B; \mathbb{Z}/2)$  est définie comme

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots + w_k(\xi).$$

L'on voit en particulier que, par définition, l'on a

$$w_i(\gamma_k^{\mathbb{R}}) = w_i \in H^i(G_k^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2), \quad i = 1, \dots, k.$$

Ainsi la cohomologie de la grassmannienne  $G_k^{\mathbb{R}}$  à coefficients  $\mathbb{Z}/2$  est engendrée par les classes de Stiefel-Whitney du fibré universel  $\gamma_k^{\mathbb{R}}$ .

**Définition 3.5.** Soit  $\xi \rightarrow B$  un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{C}}$  une application classifiante. La  $i$ -ème classe de Chern de  $\xi$ , notée  $c_i(\xi)$ , est définie comme

$$c_i(\xi) = f^*c_i \in H^{2i}(B; \mathbb{Z}), \quad i = 1, \dots, k,$$

avec  $c_i$  la  $i$ -ème classe de Chern universelle.

L'on pose par définition  $c_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z})$  et  $c_i(\xi) = 0 \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$  pour  $i > k$ .

La classe de Chern totale  $c(\xi) \in \prod_{i \geq 0} H^i(B; \mathbb{Z})$  est définie comme

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots + c_k(\xi).$$

L'on voit en particulier que, par définition, l'on a

$$c_i(\gamma_k^{\mathbb{C}}) = c_i \in H^{2i}(G_k^{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}), \quad i = 1, \dots, k.$$

Ainsi la cohomologie de la grassmannienne  $G_k^{\mathbb{C}}$  à coefficients entiers est engendrée par les classes de Chern du fibré universel  $\gamma_k^{\mathbb{C}}$ .

**Théorème 3.6.** Les classes de Stiefel-Whitney des fibrés réels  $\xi \rightarrow B$  vérifient les propriétés suivantes, qui les déterminent de manière unique.

(1) (DEGRÉ)  $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}/2)$  pour tout  $i \geq 0$ . De plus,  $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}/2)$  et  $w_i(\xi) = 0$  pour  $i > \text{rang}(\xi)$ .

(2) (FONCTORIALITÉ) pour toute application  $f : B' \rightarrow B$  l'on a

$$w_i(f^*\xi) = f^*w_i(\xi), \quad i \geq 0.$$

(3) (SOMME DE WHITNEY)

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta).$$

(4) (NORMALISATION) pour le fibré tautologique  $\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ , la première classe de Stiefel-Whitney  $w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}})$  est le générateur de  $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ .

□

**Remarque.** L'axiome de normalisation est parfois écrit dans la littérature sous la forme suivante : pour le fibré tautologique  $\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}P^1$  l'on a  $w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}) \neq 0 \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2)$ . Ces deux formulations sont bien-sûr équivalentes puisque  $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ .

**Théorème 3.7.** Les classes de Chern des fibrés complexes  $\xi \rightarrow B$  vérifient les propriétés suivantes, qui les déterminent de manière unique.

(1) (DEGRÉ)  $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$  pour tout  $i \geq 0$ . De plus,  $c_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z})$  et  $c_i(\xi) = 0$  pour  $i > \text{rang}(\xi)$ .

(2) (FONCTORIALITÉ) pour toute application  $f : B' \rightarrow B$  l'on a

$$c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi), \quad i \geq 0.$$

(3) (SOMME DE WHITNEY)

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta).$$

(4) (NORMALISATION) pour le fibré tautologique  $\gamma_{2,1}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , la première classe de Chern  $c_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{C}})$  est le générateur négatif de  $H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ , au sens où

$$\langle c_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{C}}), [\mathbb{C}P^1] \rangle = -1.$$

□

Ces deux théorèmes ont des démonstrations en tout point similaires, nous donnons donc les détails uniquement pour le premier d'entre eux concernant les classes de Stiefel-Whitney.

*Démonstration du théorème 3.6.* Démontrons d'abord l'unicité. Par la propriété de (FONCTORIALITÉ), il suffit de montrer que les classes de Stiefel-Whitney des fibrés tautologiques  $\gamma_k^{\mathbb{R}} \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$ ,  $k \geq 1$  sont uniquement déterminées par les axiomes.

Nous utilisons l'application de scindement  $f : (\mathbb{R}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$ , qui vérifie  $f^* \gamma_k^{\mathbb{R}} \simeq p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}$  et dont l'application induite en cohomologie est injective. Puisque  $w_i(p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) = f^* w_i(\gamma_k^{\mathbb{R}})$ , il suffit de montrer que les classes de Stiefel-Whitney du fibré  $p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \rightarrow (\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}$  sont uniquement déterminées par les axiomes.

Remarquons le fait que les axiomes de (NORMALISATION) et (FONCTORIALITÉ) impliquent

$$w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = x,$$

où  $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]$ ,  $|x| = 1$ . En effet, l'inclusion  $incl : \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^\infty$  est telle que  $incl^* \gamma_1^{\mathbb{R}} = \gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}$ . En appliquant les axiomes de (FONCTORIALITÉ) et (NORMALISATION) l'on voit que  $incl^* w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}})$  est non-nulle dans  $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2)$ , de sorte que nécessairement  $w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}})$  est non-nulle dans  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ . Puisque ce dernier groupe est de rang 1, il s'ensuit que  $w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = x$ .

Par les axiomes de (SOMME DE WHITNEY) et de (FONCTORIALITÉ) l'on a

$$\begin{aligned} w(p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) &= w(p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) \dots w(p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) \\ &= p_1^* w(\gamma_1^{\mathbb{R}}) \dots p_k^* w(\gamma_1^{\mathbb{R}}) \\ &= p_1^*(1+x) \dots p_k^*(1+x) \\ &= (1+x_1) \dots (1+x_k) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^k \sigma_i(x_1, \dots, x_k), \end{aligned}$$

avec  $\sigma_i \in \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k]^{\mathbb{S}_k}$  le  $i$ -ème polynôme symétrique élémentaire en les variables  $x_1, \dots, x_k$ . Puisque  $\sigma_i(x_1, \dots, x_k)$  est la composante de degré  $i$  dans  $\prod_{j=1}^n (1 + x_j)$ , on en déduit que l'on a nécessairement

$$w_i(p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) = \sigma_i(x_1, \dots, x_k).$$

Les classes de Stiefel-Whitney du fibré  $p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}$  sont donc uniquement déterminées, et il en est de même pour celles de  $\gamma_k^{\mathbb{R}}$ . L'unicité est démontrée.

Démontrons que notre définition 3.5 fournit des classes de cohomologie qui satisfont les propriétés précédentes. La propriété (DEGRÉ) est claire par définition, et la propriété de (FONCTORIALITÉ) découle directement du fait que nous avons défini ces classes par tiré en arrière de classes sur les grassmanniennes via des applications classifiantes (cf. la discussion préliminaire dans ce chapitre et la Remarque 2.31).

L'axiome de (NORMALISATION) est vérifié comme suit. Par définition nous avons  $w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = x$ , où  $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]$ ,  $|x| = 1$ . Considérons l'inclusion  $incl : \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ , qui vérifie  $incl^* \gamma_1^{\mathbb{R}} = \gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}$ . Le point clé est que  $incl^* : H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2)$  est un isomorphisme en tout degré  $0 \leq * \leq 1$ . Ainsi  $w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}) = incl^* w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = incl^* x$  est l'unique générateur de  $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ .

L'axiome de (SOMME DE WHITNEY) est vérifié comme suit. Soit  $\xi, \eta$  deux fibrés de rang respectifs  $m$  et  $n$  sur une base  $B$ , avec des applications classifiantes  $f : B \rightarrow G_m^{\mathbb{R}}$ ,  $\xi \simeq f^* \gamma_m^{\mathbb{R}}$  et  $g : B \rightarrow G_n^{\mathbb{R}}$ ,  $\eta \simeq g^* \gamma_n^{\mathbb{R}}$ . Pour plus de fluidité dans les notations nous écrivons dans ce qui suit  $\gamma_m$  au lieu de  $\gamma_m^{\mathbb{R}}$ ,  $G_m$  au lieu de  $G_m^{\mathbb{R}}$  etc. Considérons le diagramme suivant, dans lequel  $diag : B \rightarrow B \times B$  désigne le plongement diagonal.

$$\begin{array}{ccccc} \xi \oplus \eta & \longrightarrow & p_1^* \xi \oplus p_2^* \eta & \longrightarrow & p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad diag \quad} & B \times B & \xrightarrow{\quad (f,g) \quad} & G_m \times G_n \end{array}$$

Celui-ci est un diagramme de tirés en arrière de fibrés. En effet

$$(f, g)^*(p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n) = p_1^* \xi \oplus p_2^* \eta$$

puisque  $p_1 \circ (f, g) = f \circ p_1$  et  $p_2 \circ (f, g) = g \circ p_2$ , et aussi

$$diag^*(p_1^* \xi \oplus p_2^* \eta) \simeq \xi \oplus \eta$$

par définition de la somme directe de deux fibrés. Par functorialité de la classe de Stiefel-Whitney totale et du produit en cohomologie, il suffit donc de démontrer l'identité

$$(3.1) \quad w(p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n) = w(p_1^* \gamma_m) w(p_2^* \gamma_n).$$

Nous utilisons maintenant les applications de scindement

$$f_m : G_1^{\times m} \rightarrow G_m, \quad f_n : G_1^{\times n} \rightarrow G_n$$

et le diagramme de fibrés

$$\begin{array}{ccc} p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n & \longleftarrow & p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_m^* \gamma_1 \oplus (p'_1)^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus (p'_n)^* \gamma_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_m \times G_n & \xleftarrow{(f_m, f_n)} & G_1^{\times m} \times G_1^{\times n} \end{array}$$

Puisque  $f_m^*$  et  $f_n^*$  sont injectives en cohomologie, il en est de même pour  $(f_m, f_n)^*$ . Pour démontrer l'égalité (3.1) il suffit donc de montrer par functorialité

$$\begin{aligned} & w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_m^* \gamma_1 \oplus (p'_1)^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus (p'_n)^* \gamma_1) \\ &= w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_m^* \gamma_1) w((p'_1)^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus (p'_n)^* \gamma_1). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découle directement de l'associativité du produit en cohomologie en vertu de l'égalité générale

$$w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_k^* \gamma_1 \rightarrow G_1^{\times k}) = (1 + x_1) \dots (1 + x_n).$$

En effet, par définition l'on a

$$\begin{aligned} w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_k^* \gamma_1) &= w(f_k^* \gamma_k) \\ &= f_k^* w(\gamma_k) \\ &= f_k^*(1 + w_1 + \cdots + w_k) \\ &= 1 + \sigma_1(x_1, \dots, x_k) + \cdots + \sigma_k(x_1, \dots, x_k) \\ &= (1 + x_1) \dots (1 + x_k). \end{aligned}$$

□

Voici quelques conséquences immédiates des axiomes.

— Si  $\xi \simeq \eta$  alors  $w(\xi) = w(\eta)$ .

En effet,  $\xi$  et  $\eta$  ont des applications classifiantes homotopes.

— Soit  $\epsilon_k$  un fibré trivial de rang  $k$ . Alors  $w_i(\epsilon_k) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ .

En effet,  $\epsilon_k$  est le tiré en arrière du fibré trivial sur un point.

— Supposons que le fibré  $\xi$  de rang  $k$  admet  $\ell$  sections linéairement indépendantes en chaque point. Alors

$$w_{k-\ell+1}(\xi) = 0, \dots, w_k(\xi) = 0.$$

En effet, dans cette situation  $\xi$  s'écrit  $\xi \simeq \eta \oplus \epsilon_\ell$  et le résultat découle du point précédent et de l'axiome de (SOMME DE WHITNEY).

**Exemple.** Puisque  $\nu_{\mathbb{R}^{n+1}} S^n \simeq \epsilon_1$  l'on déduit que  $TS^n \oplus \epsilon_1 \simeq \epsilon_{n+1}$ , de sorte que

$$w(TS^n) = 1.$$

**Exemple.** Notons  $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1})$ . Alors

$$w(\gamma_{n+1,1} \rightarrow \mathbb{R}P^n) = 1 + x.$$

**Exemple.** Nous avons  $T\mathbb{R}P^n \simeq \text{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^\perp)$ , où l'on note  $\gamma_1 = \gamma_{n+1,1}^{\mathbb{R}}$ . Ici  $\gamma_1^\perp$  désigne le fibré de rang  $n$  sur  $\mathbb{R}P^n$  dont la fibre au-dessus d'une droite  $d \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est l'hyperplan orthogonal à  $d$ . En utilisant le fait que  $\gamma_1 \oplus \gamma_1^\perp \simeq \epsilon_{n+1}$  et  $\text{Hom}(\gamma_1, \gamma_1) \simeq \epsilon_1$ , et aussi  $\gamma_1 \simeq \gamma_1^*$  en tant que fibrés réels, nous obtenons

$$\begin{aligned} w(T\mathbb{R}P^n) &= w(T\mathbb{R}P^n \oplus \epsilon_1) \\ &= w(\text{Hom}(\gamma_1, \epsilon_{n+1})) \\ &= w((\gamma_1^*)^{\oplus(n+1)}) \\ &= w(\gamma_1)^{n+1} \\ &= (1+x)^{n+1}, \end{aligned}$$

où  $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1})$ . Ainsi

$$w_i(T\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{i} x^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

**Exercice.** Montrer que, si  $\mathbb{R}P^n$  est parallélisable, c'est-à-dire  $T\mathbb{R}P^n$  est trivial, alors nécessairement  $n$  est de la forme

$$n = 2^k - 1, \quad k \geq 0.$$

**Remarque.** Des arguments plus sophistiqués, toujours de nature topologique, restreignent davantage la situation : l'on a nécessairement  $n = 0, 1, 3, 7$ .

Voici une application spectaculaire, due à Stiefel. (cf. [Milnor, Théorème 4.7, p. 48]).

**Théorème 3.8.** *Supposons qu'il existe une application bilinéaire*

$$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*sans diviseurs de zéro. Alors  $\mathbb{R}P^{n-1}$  est parallélisable et par conséquent  $n$  est nécessairement de la forme*

$$n = 2^k, \quad k \geq 0.$$

□

Tenant compte de la remarque précédente, seulement les cas  $n = 1, 2, 4, 8$  sont possibles. Ceux-ci sont effectivement réalisables via les structures multiplicatives sur  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ .



## ANNEXE A. CONNEXIONS ET DISTRIBUTIONS HORIZONTALES

Nous discutons dans cette section un point de vue inverse, mais équivalent, sur les connexions linéaires dans les fibrés vectoriels : celui des distributions horizontales, ou encore des connexions au sens de Ehresmann.

Pour un fibré vectoriel  $E \xrightarrow{\pi} B$ , l'espace tangent aux fibres  $T_v E_p = \ker d\pi(p, v)$  est bien défini en chaque point. On le note aussi  $T_{(p,v)}^{\text{vert}} E$  et on l'appelle *espace tangent vertical*. Rappelons qu'une *distribution de rang  $k$*  sur une variété est un sous-fibré de rang  $k$  du fibré tangent.

**Définition A.1.** Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel. Une connexion sur  $E$  est la donnée d'une distribution  $H \subset TE$  transverse aux fibres et de rang égal à la dimension de la base, c'est-à-dire la donnée d'une famille lisse

$$H_{(p,v)} \subset T_{(p,v)} E, \quad (p, v) \in E$$

telle que  $\dim H_{(p,v)} = \dim T_p B$  et

$$H_{(p,v)} + T_{(p,v)}^{\text{vert}} E = T_{(p,v)} E.$$

**Exemple.** Soit  $H$  une connexion sur  $E$  et  $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^k$  une trivialisat-ion locale de  $E$ . Puisque  $T_{(p,v)}(U \times \mathbb{K}^k)$  est canoniquement isomorphe à  $T_p U \oplus \mathbb{K}^k$ , il s'ensuit que la connexion  $H$  s'écrit à travers cette trivialisat-ion en tout point  $(p, v) \in U \times \mathbb{K}^k$  comme graphe d'une application linéaire

$$A(p, v) : T_p U \rightarrow \mathbb{K}^k.$$

Toute connexion sur un fibré définit un *transport parallèle partiel* comme suit.

**Proposition-Définition A.2.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  un chemin lisse. Pour tout  $v \in E_{\gamma(0)}$  il existe  $\epsilon > 0$  et un chemin  $\tilde{\gamma}_v : [0, \epsilon[ \rightarrow E$  tel que

$$\pi \circ \tilde{\gamma}_v = \gamma|_{[0, \epsilon[}, \quad \tilde{\gamma}_v(0) = v.$$

Le chemin  $\tilde{\gamma}_v$  est unique avec cette propriété. Étant donné  $v$ , l'on peut choisir un  $\epsilon > 0$  uniforme pour la construction précédente sur un voisinage de  $v$  dans la fibre.

On appelle  $\tilde{\gamma}$  un *relevé* de  $\gamma$  (en  $v$ , ou encore avec point base  $v$ ). L'on appelle *transport parallèle partiel* l'application  $w \mapsto \tilde{\gamma}_w(\epsilon)$ , qui réalise un difféomorphisme entre des ouverts de  $E_{\gamma(0)}$  et  $E_{\gamma(\epsilon)}$ .

*Démonstration.* Considérons le diagramme déterminé par tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* E & \xrightarrow{\Gamma} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & B \end{array}$$

La connexion  $H$  induit sur  $\gamma^*E$  une connexion  $\gamma^*H$  et le champ  $\frac{\partial}{\partial t}$  sur  $[0, 1]$  admet un relevé horizontal global unique qui définit un champ de vecteurs sur  $\gamma^*E$ . Les relevés de  $\gamma$  dans  $E$  sont les images par  $\Gamma$  des courbes intégrales de ce champ de vecteurs. Celles-ci existent et sont uniques localement à condition initiale  $v \in E_{\gamma(0)} = (\gamma^*E)_0$  fixée. Par ailleurs, le flot local est un difféomorphisme local et son domaine de définition est ouvert.  $\square$

La raison pour laquelle il faut prendre des précautions quant au domaine de définition du transport parallèle est que, dans la généralité ci-dessus, le flot de l'équation différentielle que l'on obtient sur  $\gamma^*E$  peut ne pas être globalement défini.

**Définition A.3.** Une connexion sur un fibré est dite linéaire si le transport parallèle est linéaire dans les fibres.

**Proposition A.4.** Une connexion est linéaire si et seulement si, lorsque l'on écrit comme ci-dessus

$$H_{(p,v)} = \text{graphe}(A(p, v) : T_pU \rightarrow \mathbb{K}^k)$$

dans une trivialisatation locale  $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^k$ , l'on a que  $A(p, \cdot)X : \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^k$  est linéaire pour tout  $X \in T_pU$ .

*Démonstration.* Le point clé est l'observation suivante, que l'on peut aisément vérifier :

*Le flot d'une équation différentielle définie sur  $\mathbb{K}^k$  est linéaire si et seulement si l'équation différentielle est linéaire.*

Dans notre situation, si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  est une courbe lisse prenant ses valeurs dans un ouvert où l'on écrit  $H_{(p,v)} = \text{graphe}(A(p, v))$  il s'ensuit que le champ de vecteurs horizontal qui relève  $\frac{\partial}{\partial t}$  sur  $\gamma^*E$  est

$$Y_{(t,v)} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, A(\gamma(t), v)\dot{\gamma}(t) \right).$$

Pour que le transport parallèle soit linéaire, par l'observation précédente il faut et il suffit que l'application  $v \mapsto A(\gamma(t), v)\dot{\gamma}(t)$  soit linéaire en  $v$ . Comme  $\dot{\gamma}(t)$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $T_{\gamma(t)}U$ , la conclusion en découle.  $\square$

Un point de vue plus algébrique mais utile est le suivant. Toute connexion  $H$  définit une projection

$$TE \rightarrow E, \quad Y \mapsto Y^{vert}$$

en décomposant de manière unique tout vecteur  $Y \in T_{(p,v)}E$  comme  $Y = Y^H + Y^{vert}$ , avec  $Y^H \in H_{(p,v)}$  et  $Y^{vert} \in T_{(p,v)}^{vert}E \simeq E_p$ . Étant

donnée une connexion  $H$ , pour toute section  $s \in \Gamma(E)$  et tout champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(B)$  l'on peut définir la différentielle verticale

$$\nabla_X^H s \in \Gamma(E), \quad (\nabla_X^H s)(p) := (ds(p) \cdot X)^{vert}.$$

La différentielle verticale est clairement linéaire en  $X$  pour tout choix de connexion, linéaire ou pas.

**Exercice.** Vérifier que la distribution horizontale  $H$  peut être décrite comme

$$H_{(p,v)} = \{Y \in T_{(p,v)}E : \exists s \in \Gamma(E), s(p) = v, \nabla_{\pi_* X}^H s = 0\}.$$

**Proposition A.5.** Une connexion  $H$  est linéaire si et seulement si la différentielle verticale

$$\nabla^H : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(B, E)$$

est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire qui vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla^H(fs) = df \otimes s + f\nabla^H s, \quad f \in \mathcal{F}(B).$$

□

L'on voit donc que le point de vue de la section 2.2.1 est équivalent au point de vue plus géométrique décrit ci-dessus.

**Exercice.** Soit  $H$  une connexion sur un fibré vectoriel  $E$ .

(i) Considérons le fibré  $E \oplus E \rightarrow B$ . Celui-ci peut être décrit de façon alternative comme le produit fibré  $E_{B \times B} E$  au-dessus des applications de projection, de sorte que  $T_{(b,v,w)}(E \oplus E) \simeq T_{(b,v)}E_{T_b B} \times_{T_b B} T_{(b,w)}E$ , le produit fibré de  $T_{(b,v)}E$  avec  $T_{(b,w)}E$  au-dessus des applications  $d\pi(b, v)$  et  $d\pi(b, w)$ . La connexion  $H$  détermine dans  $E \oplus E$  une distribution  $H_{B \times B} H$  transverse aux fibres de rang égal à  $\dim H$ , donnée par

$$(H_{B \times B} H)_{(b,v,w)} = H_{(b,v)} T_b B \times_{T_b B} H_{(b,w)}.$$

(ii) Considérons les applications

$$\alpha : E \oplus E \rightarrow E, \quad (b, v, w) \mapsto (b, v + w)$$

et, pour  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,

$$h_\lambda : E \rightarrow E, \quad (b, v) \mapsto (b, \lambda v).$$

Montrer que  $H$  est linéaire si et seulement si elle est invariante par  $\alpha$  et  $h_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  :

$$\alpha_* H_{B \times B} H = H, \quad (h_\lambda)_* H = H.$$