

Notes de cours de Topologie algébrique

FIBRÉS VECTORIELS ET CLASSES CARACTÉRISTIQUES

Alexandru OANCEA

Université Pierre et Marie Curie

Master de mathématiques fondamentales, 2^{ème} année

31 décembre 2016

Page web du cours :

[https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/
2016-M2-TOP0-ALG/topo-alg-2016.html](https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-TOP0-ALG/topo-alg-2016.html)

PRÉREQUIS

Les applications les plus éclatantes des fibrés vectoriels concernent les variétés différentiables. Alors même que ce cours n'est pas un cours de topologie différentielle, il est fortement conseillé d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de base.

Si tel n'est pas le cas, vous pouvez par exemple lire les premiers chapitres du livre

J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Univ. Press, 1997 (1965).

Pour un aperçu plus large, voir par exemple les livres suivants qui traitent aussi la cohomologie de De Rham

J. LAFONTAINE, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 2010.

F. PAULIN, *Géométrie différentielle élémentaire*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2006-2007, disponibles en ligne :

http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf

Une autre référence possible sont les notes de cours

A. OANCEA, *Notes de cours de Géométrie différentielle*, niveau M1, UPMC, 2014-2016, disponibles en ligne

<http://www.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-GEO-DIFF/geo-diff-2016.html>

BIBLIOGRAPHIE

- (1) J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton Univ. Press, 1974.
- (2) N. Steenrod, *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, 1999 (1951).
- (3) G. Bredon, *Topology and Geometry*, GTM 139, Springer, 1994.
- (4) S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer, 2004 (1987).
- (5) M.W. Hirsch, *Differential Topology*, GTM 33, Springer, 1976.
- (6) A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- (7) R. Bott, L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, GTM 82, Springer, 1982.
- (8) D. Husemoller, *Fibre Bundles*, GTM 20, Springer, 1994 (1966).
- (9) E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1981
- (10) J.F. Davis, P. Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, GSM 35, AMS, 2001.
- (11) J. McCleary, *A User's Guide to Spectral Sequences*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 2001 (Publish or Perish, 1985).

TABLE DES MATIÈRES

Prérequis	2
Bibliographie	3
Programme du cours novembre-décembre 2016	5
Plan du cours. Contexte	6
1. Introduction	8
1.1. Définition d'un fibré vectoriel	8
1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels	9
2. Classification des fibrés. Homotopie	16
2.1. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères	16
2.2. Notions de topologie différentielle	22
2.3. Fibrés vectoriels et homotopie	33
2.4. Groupes d'homotopie	42
3. Rappels d'homologie et de cohomologie	51
3.1. Homologie et cohomologie singulière	51
3.2. Homologie et cohomologie cellulaire	51
3.3. Homologie à coefficients dans un système local	51
4. Classes caractéristiques	52
4.1. Le point de vue axiomatique	52
4.2. Le point de vue de la théorie de l'obstruction	61
4.3. Le théorème de Leray-Hirsch. Cohomologie des Grassmanniennes	85
5. Classe fondamentale. Dualité de Poincaré	90
Annexe A. Connexions et distributions horizontales	91
Annexe B. CW-complexes. Théorème de Hurewicz. Théorème de Whitehead. Théorème d'approximation cellulaire.	94
Annexe C. Rappels d'homologie et de cohomologie	95
Annexe D. Suites spectrales	97

PROGRAMME DU COURS NOVEMBRE-DÉCEMBRE 2016

Cours 1. Motivations pour l'étude des fibrés vectoriels.

Cours 2. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères. Connexions.

Cours 3. Approximation de fonctions. Homotopie. Transversalité.

Cours 4. Théorème de classification des fibrés de rang et base donnés.

Cours 5. Groupes d'homotopie.

Cours 6. Degré d'une application différentiable. $\deg : \pi_n(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.
Rappels d'homologie et cohomologie singulière et cellulaire.

Cours 7. Point de vue axiomatique sur les classes de Stiefel-Whitney et Chern.

Cours 8. CW-complexes. Théorème de Hurewicz. Théorie de l'obstruction I : le cocycle d'obstruction.

Cours $8\frac{1}{2}$: Théorème de Leray-Hirsch. Calcul de la cohomologie de Grassmaniennes.

Cours 9 : Théorie de l'obstruction II : la cochaîne de différence. Homologie à coefficients locaux.

Cours 10 : Théorie de l'obstruction III : homotopies, extensions de sections, classe d'obstruction primaire. La classe d'Euler.

Cours $10\frac{1}{2}$: Suites spectrales.

Cours 11 : Espaces de Eilenberg-MacLane et relation homotopie-cohomologie. Classe fondamentale. Survol : produits cup et cap, dualité de Poincaré, produit cup et intersection. Classe de Thom.

PLAN DU COURS. CONTEXTE

Classes caractéristiques. Le traitement est différent de celui que l'on retrouve dans les références standard.

Nous adoptons deux points de vue :

(i) axiomatique. Historiquement, celui-ci a été suggéré par Hirzebruch. Différentes approches sont présentées dans la littérature : [Milnor-Stasheff] utilisent une méthode due à Thom basée sur les carrés de Steenrod, [Bott-Tu] et [Husemoller] utilisent un point de vue dû à Grothendieck basé sur le principe de scindage et le théorème de Leray-Hirsch, qui met en jeu une certaine équation cohomologique.

Je donne un traitement complet qui évite l'utilisation des carrés de Steenrod et le principe de scindage. Les carrés de Steenrod sont des opérations fondamentales mais trop profondes pour le but que nous avons en vue. Le principe de scindage peut paraître artificiel au premier abord, ainsi que l'équation cohomologique qui mène à la définition des classes caractéristiques.

Après avoir montré que les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels sur une base donnée sont en bijection avec les classes d'homotopie d'applications vers les grassmanniennes, nous définissons les classes de Stiefel-Whitney et Chern comme tirés en arrière de certaines classes de cohomologie remarquables sur les grassmanniennes. Nous calculons à cet effet avec un minimum de technologie (théorème de Leray-Hirsch) la cohomologie de Grassmanniennes. Cette manière de mener le calcul inspirée de [Hatcher] évite en particulier la décomposition cellulaire de Schubert. D'un point de vue conceptuel, c'est la façon la plus directe de procéder. Les approches de Thom et Grothendieck apparaissent comme étant plus simples uniquement à condition que l'on connaisse les prérequis.

(ii) théorie de l'obstruction. Historiquement, c'est ce point de vue qui a guidé les travaux fondateurs de Stiefel, Whitney, Chern, Steenrod, et ceci pour la bonne raison qu'il met en avant la géométrie. Nous définissons non seulement les classes de Stiefel-Whitney et Chern de cette façon alternative, mais aussi la classe d'Euler. Le lecteur pourra comparer par exemple avec le traitement de [Husemoller, §18.7].

Ceci est une situation symptomatique pour une théorie qui est arrivée à l'apogée de son développement : une pluralité de points de vue qui s'éclairent réciproquement. Aucun n'est plus valable que l'autre, chacun est indispensable pour avoir une vue globale. L'on ne pense pas au point de vue de la théorie de l'obstruction lorsque l'on fait des calculs avec des classes de cohomologie ; néanmoins, sans ce point de vue la théorie des classes caractéristiques reste abstraite et mystérieuse. À titre de comparaison : l'on ne pense pas à l'interprétation géométrique

de l'intégrale de Riemann lorsque l'on fait une intégration par parties ; néanmoins, sans l'interprétation géométrique sous-jacente l'intégration serait dépourvue de sens.

Homotopie et homologie. Le point de vue de la théorie de l'obstruction nous force à rendre justice dans ce cours aux aspects homotopiques. En effet, nous parlons en égale mesure d'homotopie et d'homologie. Par ailleurs, l'une des conséquences agréables du fait d'avoir développé la théorie de l'obstruction est le fait de pouvoir énoncer et démontrer (à quelques détails près) le théorème fondamental qui relie homotopie et (co)homologie

$$[X, K(G, n)] \simeq H^n(X; G).$$

Nous démontrons par ailleurs le théorème de Hopf qui relie degré et $\pi_n(S^n)$ par un argument différentiel, ou encore le théorème de Hurewicz par un argument de suite spectrale. Ceci amène les théorèmes de Whitehead et le théorème d'approximation cellulaire à portée du lecteur.

CW-complexes et homologie cellulaire. Un autre avantage du fait de développer la théorie de l'obstruction est que l'homologie cellulaire apparaît de manière frappante non seulement comme un outil de calcul puissant, mais aussi comme un outil conceptuel. De la même manière, le lecteur pourra expérimenter la portée du concept de CW-complexe, bien au-delà de la facilité de certains calculs homologiques.

Topologie différentielle. Nous avons fait un effort explicite dans la première partie du cours pour fournir des arguments de topologie différentielle là où cela était possible. Nous discutons en particulier des notions d'approximation lisse et souhaitons que le lecteur prenne conscience du fait que, dans l'étude de la topologie des variétés, les techniques différentielles ne sont en rien moins puissantes que les techniques topologiques.

CE QU'IL N'Y A PAS (ENCORE) DANS CE COURS

Nous avons touché uniquement de façon marginale à la dualité de Poincaré. La section qui lui est dédiée contient une feuille de route avec des références précises concernant les notions importantes pour une première rencontre.

Nous n'avons pas inclus le calcul des premiers groupes d'homotopie non triviaux des variétés de Stiefel (réelles et complexes).

1. INTRODUCTION

1.1. Définition d'un fibré vectoriel. Un fibré vectoriel de rang k sur une variété B est la donnée d'une famille lisse d'espaces vectoriels de dimension k indexée par les points de B et qui est localement constante sur B ("localement triviale"). L'on travaillera avec des espaces vectoriels réels ou complexes, auquel cas on précisera parfois "fibré vectoriel réel" ou "fibré vectoriel complexe". L'on utilisera la notation \mathbb{K} pour désigner indistinctement les corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . La définition formelle est la suivante :

Définition 1.1. *Un fibré vectoriel de rang r sur une base B est la donnée d'une variété E munie d'une submersion $\pi : E \rightarrow B$ telle que la condition suivante de trivialité locale soit satisfaite :*

la base B admet un recouvrement ouvert (U_i) tel qu'il existe des difféomorphismes $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^r$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{K}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_i \end{array}$$

et tels que, pour tous i, j , le difféomorphisme

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r,$$

est de la forme

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, v) = (p, \Phi_{ij}(p)v),$$

avec

$$\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$$

lisse.

Dans la définition précédente, l'application $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ est nécessairement de la forme $(p, v) \mapsto (p, \Phi_{ij}(p)v)$, avec $\Phi_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^r$ lisse. L'on demande à ce que cette dernière application soit un isomorphisme linéaire à $p \in U_i \cap U_j$ fixé et on la note $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$.

Terminologie. E s'appelle *espace total du fibré*; B s'appelle *base du fibré*; π s'appelle *projection*; $E_b := \pi^{-1}(b)$, $b \in B$ s'appelle *la fibre au-dessus du point b* ; les Φ_i s'appellent *trivialisations locales*; les Φ_{ij} s'appellent *applications de changement de trivialisation*. L'on note souvent un point de l'espace total par (b, v) , avec la signification $v \in E_b$.

Conséquences de la définition :

- (i) chaque fibre E_b , $b \in B$ possède une structure d'espace vectoriel de dimension r défini sur \mathbb{K} . En effet, l'on transporte la structure d'espace vectoriel de \mathbb{K}^r via une trivialisation locale Φ_i au voisinage de b . Le fait que les applications de changement de

trivialisation soient des isomorphismes linéaires assure que cette structure d'espace vectoriel est indépendante du choix de Φ_i .

Par contre, il est important de noter que la fibre E_b ne possède pas de base canonique. Si c'était le cas, tous les fibrés seraient isomorphes au fibré trivial $B \times \mathbb{K}^r$. Ceci n'est certainement pas vrai, comme nous allons le voir tout de suite.

(ii) la collection des Φ_{ij} vérifie la “condition de 1-cocycle” :

$$\forall i, j, k, \quad \Phi_{ij}\Phi_{jk} = \Phi_{ik}, \quad \Phi_{ii} = \text{Id}.$$

Réciproquement, la donnée d'un recouvrement ouvert (U_i) de B et d'un 1-cocycle $\{\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K}) : i, j\}$ définit un fibré vectoriel de rang r sur \mathbb{K} dont les applications de changement de trivialisation sont données par ce même cocycle. De façon explicite l'on a

$$E = \bigsqcup_i U_i \times \mathbb{K}^r / \sim,$$

avec, pour $(p, v) \in U_i \times \mathbb{K}^r$ et $(q, w) \in U_j \times \mathbb{K}^r$,

$$(p, v) \sim (q, w) \quad \Leftrightarrow \quad p = q \quad \text{et} \quad v = \Phi_{ij}(p)w.$$

Remarque. Étant donnée une base B qui est une variété complexe, un *fibré holomorphe au-dessus de B* est un fibré complexe qui admet une structure de variété complexe pour laquelle les applications de trivialisation sont des biholomorphismes. De façon équivalente, les applications $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$ qui constituent le cocycle de définition sont des applications holomorphes.

Attention : en règle générale, un fibré complexe sur une base B n'a rien d'holomorphe ! (par ailleurs, la base peut très bien être de dimension impaire).

1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels.

(I) *Le formalisme des fibrés vectoriels est le formalisme adapté pour décrire des objets de nature infinitésimale définis sur une variété.* Ou encore : tout fibré vectoriel peut être interprété comme la donnée d'informations supplémentaires de nature linéaire, c'est-à-dire infinitésimale, le long d'une variété.

Exemples : TB , T^*B , $\Lambda^k T^*B$.

Vous avez déjà rencontré les champs de vecteurs, les 1-formes différentielles, ou encore les k -formes différentielles. Tous ces objets sont clairement de nature infinitésimale et ils jouent un rôle important dans l'étude des variétés. Ce sont en particulier autant d'exemples de “sections de fibrés vectoriels”.

Définition 1.2. Une section d'un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} B$ est une application lisse $s : B \rightarrow E$ telle que $s(b) \in E_b$ pour tout point $b \in B$. De façon équivalente,

$$\pi \circ s = \text{Id}_B.$$

Les champs de vecteurs sont les sections de TB . Les 1-formes différentielles sont les sections de T^*B . Les k -formes différentielles sont les sections de $\Lambda^k T^*B$.

L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel possède une structure naturelle d'espace vectoriel : l'addition et la multiplication par des scalaires sont définies ponctuellement. On le note

$$\Gamma(E), \text{ ou } \Gamma(B, E).$$

Mieux même, l'espace $\Gamma(E)$ est un module sur l'anneau $\mathcal{F}(B)$ des fonctions lisses sur B . Le zéro de l'espace $\Gamma(E)$ est la *section nulle*, notée souvent 0_B , qui prend la valeur $0 \in E_b$ en tout point de $b \in B$. Celle-ci définit un plongement canonique de B dans l'espace total du fibré E et justifie le dessin schématisé par lequel on représente souvent un fibré vectoriel.

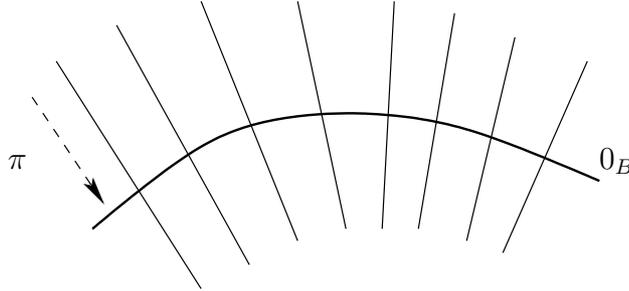


FIGURE 1

Le fait que les sections puissent être additionnées ponctuellement et aussi multipliées par des fonctions nous mène vers le point de vue suivant.

(II) *Les sections de fibrés peuvent souvent être interprétées comme des généralisations des fonctions définies sur la base B .*

L'exemple suivant est emblématique. Considérons l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ et le *fibré tautologique*

$$\mathcal{O}(-1) = \{(d, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} : v \in d\} \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}.$$

L'on vérifie que c'est un fibré holomorphe de rang 1 sur $\mathbb{C}P^n$ dont la projection est donnée par $(d, v) \mapsto d$.

Étant donné un \mathbb{K} -espace vectoriel V l'on note $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ son dual. Définissons aussi le *fibré hyperplan*

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^* = \{(d, \alpha) : \alpha \in d^*\}.$$

Posons aussi

$$\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k}, \quad \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes k}, \quad k \geq 1$$

et

$$\mathcal{O}(0) = \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}.$$

Exercice. Montrer que l'espace des sections *holomorphes* de $\mathcal{O}(-k)$, $k \geq 1$ est réduit à zéro. Montrer que l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(k)$, $k \geq 1$ s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré k à coefficients complexes en $n + 1$ variables. Montrer que l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(0)$ est de dimension 1 (toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}P^n$ est constante).

Autrement dit, alors que $\mathbb{C}P^n$ n'admet que très peu de fonctions holomorphes (les fonctions constantes), certains fibrés holomorphes en droites sur $\mathbb{C}P^n$ admettent de nombreuses sections.

Exercice. Estimer la dimension de l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(k)$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

(III) *Déformations infinitésimales.*

Dans l'exemple précédent nous avons implicitement utilisé les puissances tensorielles d'un fibré en droites. De façon générale, les opérations canoniques sur les espaces vectoriels et les isomorphismes canoniques entre espaces vectoriels peuvent être mis en famille et donc passent aux fibrés. Ici, par "canonique" l'on entend "qui ne fait pas intervenir de choix de base".

Exemples : étant donnés deux fibrés E et F sur la même base, l'on peut définir leur somme directe $E \oplus F$, leur produit tensoriel $E \otimes F$, leurs duals E^* , F^* , le fibré des homomorphismes $\text{Hom}(E, F)$, canoniquement isomorphe à $E^* \otimes F$. Étant donné un sous-fibré $F \subset E$, l'on peut définir le fibré quotient E/F etc.

Exercice. Décrire la présentation des fibrés ci-dessus par des cocycles, étant données des cocycles de définition pour E et F .

Définition 1.3. *Étant donné un fibré E , un sous-fibré de rang ℓ est une sous-variété $F \subset E$ telle que, pour tout $b \in B$, $F_b \subset E_b$ est un sous-espace vectoriel de rang ℓ .*

Exercice. Montrer que F possède alors une structure naturelle de fibré vectoriel.

Le notion de fibré quotient apparaît très souvent en géométrie, notamment à travers la construction suivante.

Définition 1.4. *Soit $M \subset N$ une sous-variété. Le fibré normal à M dans N est par définition*

$$\nu_N M = TN|_M / TM.$$

Ce fibré joue un rôle important pour comprendre la façon dont M est plongée dans N à travers le théorème suivant.

Théorème 1.5 (Théorème du voisinage tubulaire, voir par exemple Bredon II.11, en particulier 11.4 et 11.14). *Soit $M \subset N$ une sous-variété. Un voisinage de M dans N est difféomorphe à un voisinage de la section nulle dans $\nu_N M$. Le difféomorphisme peut être choisi de façon à ce qu'il coïncide sur M avec le plongement donné par la section nulle.* \square

Voici deux exemples significatifs. L'on considère les deux plongements suivantes du cercle S^1 .

(a) $S^1 \subset S^2$, le plongement du cercle en tant qu'équateur. Alors $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ est le fibré trivial. Un voisinage de S^1 dans S^2 est difféomorphe à un cylindre au-dessus de S^1 .

(b) $S^1 \simeq \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$, le plongement du cercle en tant que droite à l'infini dans le plan projectif réel. L'on vérifie que l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur la paire (S^2, S^1) , dont le quotient est la paire $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1)$, détermine par linéarisation une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ dont l'élément non-trivial agit par l'application antipodale sur la base et par $v \mapsto -v$ sur la fibre. Le quotient est le fibré $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$. L'on vérifie que ce dernier est un fibré en droites réelles qui n'est pas trivial puisque toute section possède au moins un zéro. On l'appelle aussi *bande de Möbius*.

Exercice. Montrer que le fibré $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$ n'est pas trivial.

L'importance pratique du théorème de voisinage tubulaire est que, pour comprendre les "petites" déformations d'une sous-variété M à l'intérieur d'une variété N , il suffit de comprendre les déformations de la section nulle dans $\nu_N M$.

L'on a tout de suite une indication sur l'importance du problème de classification des fibrés de rang r donné sur une variété M donnée : il fournit en particulier la réponse à la question de comprendre quels sont les voisinages possibles des plongements de codimension r de M .

(IV) *Le langage des fibrés vectoriels est incontournable pour étudier les linéarisations d'équations d'origine géométrique.* Soient X, Y deux variétés et notons $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications lisses $f : X \rightarrow Y$. L'on pense à $\mathcal{F}(X, Y)$ comme étant une variété de dimension infinie (modélisée sur un espace de Fréchet). Un candidat raisonnable pour l'espace tangent à $\mathcal{F}(X, Y)$ en un point f est

$$T_f \mathcal{F}(X, Y) = \Gamma(f^*TY),$$

avec f^*TY le fibré tiré-en-arrière que nous définissons ci-dessous. En effet, en interprétant les vecteurs tangents à $\mathcal{F}(X, Y)$ au point f comme des jets d'ordre 1 en 0 de courbes $f_t, t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\epsilon > 0$ avec $f_0 = f$, l'on

identifie un tel vecteur tangent avec la famille de vecteurs tangents

$$\left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x) : x \in X \right\}.$$

Chaque vecteur tangent $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x)$ appartient à $T_{f(x)}Y$, et il s'ensuit que la famille toute entière peut être regardée comme une section d'un fibré sur X dont la fibre en un point $x \in X$ est $T_{f(x)}TY$. Ceci est exactement la définition des sections du fibré tiré-en-arrière f^*TY .

Définition 1.6. Soit $F \xrightarrow{\pi} Y$ un fibré et $f : X \rightarrow Y$ une application lisse. L'on définit le fibré tiré-en-arrière par f comme

$$f^*F = \{(x, v) : x \in X, v \in F_{f(x)}\}.$$

Exercice. Montrer que f^*F est bien un fibré localement trivial sur X . La projection $f^*F \rightarrow X$ associe à (x, v) le point x . Montrer que l'on a un diagramme commutatif

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} f^*F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

dans lequel la flèche horizontale du haut est l'identité sur chaque fibre. Montrer que f^*F muni de cette flèche $f^*F \rightarrow F$ est un objet final dans la catégorie des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

donnés par les morphismes de fibrés $E \rightarrow F$ qui relèvent f . On dit aussi que (1.1) est un *carré cartésien*. Le fibré tiré-en-arrière peut être interprété comme un produit fibré (!), ou encore comme une “limite” au sens algébrique du terme.

Revenons maintenant aux équations de nature géométrique. Une telle équation peut souvent être mise sous la forme

$$\mathcal{S}(f) = 0,$$

avec \mathcal{S} une section d'un certain fibré

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}(X, Y).$$

Typiquement la fibre \mathcal{E}_f est de dimension infinie. L'on s'intéresse à la linéarisation

$$d\mathcal{S}(f) : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow T_{(f,0)}\mathcal{E}$$

en un zéro de \mathcal{S} , c'est-à-dire en un point f tel que $\mathcal{S}(f) = (f, 0)$.

Exercice. Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel. Montrer que, pour tout $b \in B$, l'on a un isomorphisme canonique

$$T_{(b,0)}E \simeq T_bB \oplus E_b.$$

Soit $s : B \rightarrow E$ une section lisse et $b \in B$ un zéro de s , à savoir un point tel que $s(b) = (b, 0)$. Montrer que, lue à travers l'isomorphisme précédent, la différentielle de s au point b agit comme

$$ds(b) = (\text{Id}_{T_bB}, ds^{\text{vert}}(b)) : T_bB \rightarrow T_bB \oplus E_b,$$

avec

$$ds^{\text{vert}}(b) : T_bB \rightarrow E_b$$

une application linéaire.

L'on dit que s est transverse à la section nulle si $ds^{\text{vert}} : T_bB \rightarrow E_b$ est surjective pour tout zéro b de s . Montrer que cette condition est équivalente à

$$T_bB + T_{(b,0)}\text{im}(s) = T_{(b,0)}E.$$

Exercice 1. Soit M une variété et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Montrer que la section $df \in \Gamma(T^*M)$ est transverse à la section nulle si et seulement si f est une fonction de Morse.

Revenons à nouveau au contexte fonctionnel. Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ un zéro de \mathcal{S} . La différentielle $d\mathcal{S}(f)$ est donc uniquement déterminée par

$$d\mathcal{S}^{\text{vert}} : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}_f.$$

En pratique la fibre \mathcal{E}_f est elle-même décrite comme espace de sections d'un certain fibré vectoriel et l'opérateur $d\mathcal{S}^{\text{vert}}(f)$ est un opérateur linéaire et continu par rapport à un choix approprié de normes.

Exemple. Soit (Σ, j) une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1, pour laquelle on note la structure complexe par j . Ainsi $j \in \Gamma(\text{End}(T\Sigma))$, $j^2 = -\text{Id}$. Soit (Y, J) une variété complexe, pour laquelle on note J la structure complexe, de sorte que $J \in \Gamma(\text{End}(TY))$, $J^2 = -\text{Id}$. Considérons le problème de trouver des applications holomorphes parmi les applications lisses

$$f : \Sigma \rightarrow Y.$$

Le fait que la différentielle df d'une telle application soit \mathbb{C} -linéaire en tout point, c'est-à-dire qu'elle vérifie $df \circ j = J \circ df$, est équivalent à l'annulation de l'expression

$$\bar{\partial}f := df + J \circ df \circ j$$

en tout point de Σ . Notons que $\bar{\partial}f \in \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY))$, le fibré des homomorphismes \mathbb{R} -linéaires et \mathbb{C} -anti-linéaires de $T\Sigma$ dans f^*TY , encore noté $\Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY)$. L'équation des courbes holomorphes définies sur Σ à valeurs dans Y est donc

$$\bar{\partial}f = 0,$$

avec $\bar{\partial}$ interprétée comme section d'un fibré (de rang infini) \mathcal{E} au-dessus de $\mathcal{F}(\Sigma, Y)$ dont la fibre est donnée par

$$\mathcal{E}_f = \Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY).$$

La linéarisation de $\bar{\partial}$ en un zéro f est donc déterminée par l'opérateur

$$d\bar{\partial}^{vert}(f) : \Gamma(f^*TY) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY)).$$

L'on peut bien évidemment expliciter cet opérateur, par exemple en coordonnées locales. Il se trouve qu'il est elliptique et donc de Fredholm lorsqu'on le fait agir entre des complétions de Sobolev appropriées. Ses propriétés déterminent les propriétés locales de l'espace des courbes holomorphes $\Sigma \rightarrow Y$.

2. CLASSIFICATION DES FIBRÉS. HOMOTOPIE

La question que nous posons maintenant est celle de classifier les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang k donné sur une base donnée. Nous allons voir que celles-ci forment un ensemble discret qui peut être mis en bijection avec certains ensembles de classes d'homotopie d'applications.

Rappelons qu'un isomorphisme entre deux fibrés E, F sur une même base B est un difféomorphisme $E \rightarrow F$ qui commute avec les projections et réalise un isomorphisme linéaire $E_b \rightarrow F_b$ entre les fibres au-dessus de tout point $b \in B$. Les isomorphismes de fibrés sont les isomorphismes dans la catégorie des fibrés au-dessus de B , dont les morphismes sont les applications lisses $E \rightarrow F$ qui commutent avec les projections et qui sont linéaires en restriction à chaque fibre.

2.1. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères. Le cas particulier où la base est une sphère fait déjà apparaître les notions clé qui permettent de comprendre le cas général.

Théorème 2.1. *Soient $k \geq 1, n \geq 1$. L'ensemble*

$$\mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(S^n)$$

des classes d'isomorphisme de fibrés de rang k sur \mathbb{K} au-dessus de la sphère S^n sont en correspondance bijective avec

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})).$$

*Ici $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ désigne le $(n-1)$ -ème groupe d'homotopie du groupe linéaire $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$, à savoir les classes d'homotopie d'applications à point base $(S^{n-1}, *) \rightarrow (\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}), \mathrm{Id})$. L'action du groupe $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ sur l'ensemble $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ est induite par l'action de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ sur lui-même par conjugaison.*

Remarque préliminaire concernant l'action de π_0 sur π_{n-1} . Pour tout groupe de Lie G , l'ensemble $\pi_0(G)$ est l'ensemble des composantes connexes de G et possède une structure de groupe canonique induite par la multiplication dans G . Pour un espace topologique X l'ensemble $\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X , mais il ne possède pas en général une structure de groupe. Pour un groupe de Lie, et plus généralement pour une variété, les composantes connexes coïncident avec les composantes connexes par arcs.

Tout groupe de Lie G agit sur lui-même par conjugaison via la représentation $G \mapsto \mathrm{Diff}(G), g \mapsto \iota_g, \iota_g(h) = ghg^{-1}$. Chacun des difféomorphismes ι_g préserve la composante connexe de l'identité. Pour deux éléments g, g' appartenant à la même composante connexe de G les applications ι_g et $\iota_{g'}$ sont homotopes en tant qu'applications

préservant le point base donné par l'élément neutre $e \in G$. Ainsi $\pi_0(G)$ agit sur tous les groupes d'homotopie d'ordre supérieur $\pi_i(G, e)$, $i \geq 1$. Cette action est bien-sûr triviale si G est connexe.

L'on a en particulier

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})) \simeq \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))$$

puisque $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ est connexe.

L'on a aussi

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})) \simeq \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$$

pour k impair. Mais en général l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})) \simeq \{\pm 1\}$ n'est pas triviale lorsque k est pair. L'on renvoie à une discussion plus détaillée à la fin de cette section.

Démonstration. Nous allons décrire une bijection explicite

$$\mathcal{R} : \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{K}}(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})).$$

(L'on utilise la notation \mathcal{R} pour signifier que l'élément $\mathcal{R}(E)$ décrit E comme “ \mathcal{R} ecollement” de deux fibrés triviaux sur des boules de dimension n .)

Écrivons la sphère comme union de deux hémisphères

$$S^n = D_+^n \cup D_-^n, \quad D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$$

et fixons un point p sur l'équateur S^{n-1} . Fixons aussi un isomorphisme linéaire $E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$.

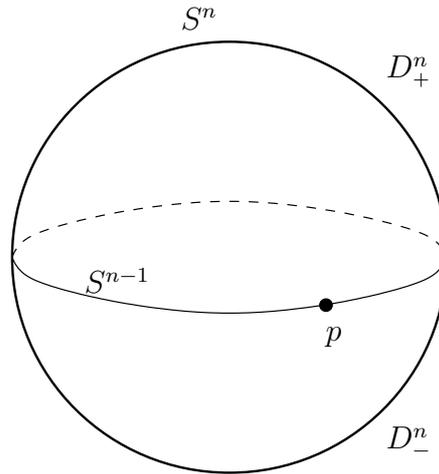


FIGURE 2

Nous démontrons l'affirmation suivante comme cas particulier d'un résultat plus général (Corollaire 2.8), après la preuve.

Affirmation No. 1 : Le fibré E est trivial en restriction à D_{\pm}^n . \square

Après composition au but par des éléments appropriés de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$, nous obtenons des trivialisations

$$\Phi_{\pm} : E|_{D_{\pm}^n} \xrightarrow{\sim} D_{\pm}^n \times \mathbb{K}^k$$

qui coïncident avec l'isomorphisme fixé au-dessus du point p . En restriction à S^{n-1} l'on obtient une application

$$\Phi = \Phi_+ \circ \Phi_-^{-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}), \quad \Phi(p) = \mathrm{Id}$$

et l'on définit

$$\mathcal{R}(E) := [\Phi],$$

la classe sous l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ de la classe d'homotopie de Φ .

Pour montrer la bonne définition de l'application \mathcal{R} il s'agit de montrer que la classe d'homotopie de Φ est indépendante du choix des trivialisations Φ_{\pm} , ainsi que du choix de l'isomorphisme $E_p \simeq \mathbb{K}^k$. En effet, lorsque l'on choisit deux trivialisations différentes Ψ_{\pm} , l'on peut écrire en restriction à S^{n-1}

$$\Psi_+ \Psi_-^{-1} = (\Psi_+ \Phi_+^{-1}) \Phi_+ \Phi_-^{-1} (\Phi_- \Psi_-^{-1}).$$

Mais $\Psi_+ \Phi_+^{-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ est une application qui admet par définition une extension à D_+^n , donc nulle homotope. Il en est de même pour $\Phi_- \Psi_-^{-1}$ et l'on conclut que $\Psi_+ \Psi_-^{-1}$ est homotope à $\Phi_+ \Phi_-^{-1}$.

Lorsque l'on change l'isomorphisme $\alpha : E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$ en $\beta : E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$, à partir de deux trivialisations Φ_{\pm} qui coïncident avec α au-dessus du point p l'on peut considérer les trivialisations $(\beta\alpha^{-1})\Phi_{\pm}$ qui coïncident avec β au-dessus du point p . Alors $\Phi_+ \Phi_-^{-1}$ change par conjugaison avec $\beta\alpha^{-1}$. La classe de (la classe d'homotopie de) Φ sous l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ ne change donc pas.

La conclusion de cette discussion est que la valeur de $\mathcal{R}(E)$ ne dépend bien que de la classe d'isomorphisme du fibré E .

L'application \mathcal{R} est surjective. En effet, étant donnée une classe de $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ représentée par $\Phi : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ avec $\Phi(p) = \mathrm{Id}$, l'on définit un fibré E tel que $\mathcal{R}(E) = [\Phi]$ par

$$E = D_+^n \times \mathbb{K}^k \sqcup D_-^n \times \mathbb{K}^k / \sim$$

où, pour $(q, v) \in D_+^n \times \mathbb{K}^k$ et $(q', v') \in D_-^n \times \mathbb{K}^k$, l'on a

$$(q, v) \sim (q', v') \quad \Leftrightarrow \quad q = q' \text{ et } v = \Phi(q)v'.$$

L'application \mathcal{R} est injective. Soient E_0, E_1 deux fibrés de rang k et construisons des applications $\Phi_i : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$, $i = 0, 1$ comme ci-dessus, avec $\Phi_i(p) = \mathrm{Id}$. Il s'agit de montrer que, si les classes $[\Phi_0]$ et $[\Phi_1]$ sont égales, alors les fibrés E_0 et E_1 sont isomorphes. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ les applications Φ_0 et Φ_1 sont homotopes. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quitte à composer au but l'isomorphisme linéaire $E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$ qui

détermine Φ_1 par un automorphisme linéaire de \mathbb{R}^k qui change l'orientation, l'on peut supposer sans perte de généralité que les applications Φ_0 et Φ_1 sont homotopes.

La construction précédente peut alors être mise en famille : une homotopie Φ_t , $t \in [0, 1]$ entre Φ_0 et Φ_1 détermine un fibré \mathcal{E} au-dessus de $S^n \times [0, 1]$, avec $\mathcal{E}|_{S^n \times \{0\}} \simeq E_0$ et $\mathcal{E}|_{S^n \times \{1\}} \simeq E_1$ par construction. La conclusion découle alors de l'affirmation suivante, qui sera aussi démontrée plus bas (cf. preuve du Corollaire 2.7).

Affirmation No. 2 : Soit B une variété et \mathcal{E} un fibré sur $B \times [0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$ les fibrés $\mathcal{E}|_{B \times \{t\}} \rightarrow B$ sont isomorphes.

□

La preuve fait apparaître plusieurs phénomènes importants :

(I) Fibrés vectoriels et homotopie. Tout fibré vectoriel sur une boule est trivial (Affirmation No. 1). Plus généralement, tout fibré sur le produit d'une variété avec un intervalle est isomorphe au tiré en arrière d'un certain fibré sur la variété en question par la projection (Affirmation No. 2, légèrement reformulée). De façon plus générale, *il existe un lien étroit entre classes d'homotopie d'applications, ou encore type d'homotopie d'espaces, et classes d'isomorphisme de fibrés.*

(II) Groupes d'homotopie d'ordre supérieur. L'énoncé du théorème 2.1 met en évidence de façon naturelle les groupes d'homotopie de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$. L'on peut se douter que, de façon plus générale, *les groupes d'homotopie des groupes linéaires jouent un rôle important dans la classification des fibrés vectoriels sur une base quelconque.*

Toute tentative de classification dans une situation concrète nécessite des outils de calcul de ces groupes d'homotopie. Nous allons expliciter plus bas la structure de groupe de ces derniers. L'exercice suivant se posera alors comme une question naturelle au lecteur.

Exercice 2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ décrire de façon directe la structure de groupe induite sur $\mathcal{V}ect_k^{\mathbb{C}}(S^n)$ par la bijection \mathcal{R} , sans se référer à la structure de groupe de $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))$. Discuter le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(III) Décompositions cellulaires. Dans la preuve du théorème 2.1 il a été utile de décomposer la sphère comme union de deux boules recollées le long de leur bord, et ce qui a permis d'avancer dans la preuve a été le fait que la restriction de tout fibré à une boule est triviale (Affirmation No. 1). De façon plus générale, *dans un problème de classification de fibrés vectoriels sur une base quelconque il sera utile de considérer des "décompositions cellulaires" de la base, c'est-à-dire de la présenter comme union de boules (de différentes dimensions, collées le long de leur bord "de façon ordonnée").*

Nous allons reprendre chacun de ces trois thèmes par la suite.

Remarque-Exercice (action de π_0 sur π_{n-1}). Rappelons que le groupe de Lie $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes, que l'on note $\mathrm{GL}_k^\pm(\mathbb{R})$ et qui sont distinguées par le signe du déterminant.

Le fait que l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ sur $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ est triviale pour k impair se justifie ainsi : la matrice diagonale $\mathrm{diag}(-1, -1, \dots, -1)$ appartient en même temps à $\mathrm{GL}_k^-(\mathbb{R})$ et au centre de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, de sorte qu'elle induit par conjugaison l'identité de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$.

Noter aussi que l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ sur lui-même induite par la conjugaison dans $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ est triviale.

Lorsque k est pair, l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ sur $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$, $n-1 \geq 1$ peut être non triviale, comme le montre l'exemple suivant.

Rappelons que le procédé de Gram-Schmidt peut être interprété comme réalisant un difféomorphisme

$$\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \simeq O(k) \times T_k,$$

avec T_k l'espace des matrices $k \times k$ triangulaires supérieures ayant des coefficients positifs sur la diagonale. Il s'ensuit que $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ se rétracte sur $O(k)$ et l'inclusion $SO(k) \hookrightarrow \mathrm{GL}_k^+(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homotopie.

Considérons $k = 2$, $n = 2$. Nous obtenons

$$\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \pi_1(SO(2)) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

et un générateur est donné par le lacet de rotations

$$\gamma : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La conjugaison par la matrice $\mathrm{diag}(-1, 1) \in \mathrm{GL}_2^-(\mathbb{R})$ fournit le lacet

$$\bar{\gamma} : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Celui-ci représente l'autre générateur de $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$, puisque $\bar{\gamma}(\theta) = \gamma(-\theta)$.

Si l'on identifie $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ à \mathbb{Z} via $\gamma \mapsto 1$, alors

$$\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))/\pi_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Montrer que les fibrés $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ forment un système complet de représentants pour $\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(S^2) \simeq \pi_1(\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})) = \pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. À quel générateur correspond $\mathcal{O}(1)$? Remarquer le fait que $\mathcal{O}(-k) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(k), \mathbb{C})$, le dual de $\mathcal{O}(k)$ en tant que fibré complexe.

Soit E un fibré complexe. Montrer que le fibré réel sous-jacent à son dual complexe est isomorphe au dual réel du fibré réel sous-jacent à E .

Montrer que tout fibré réel est isomorphe à son dual.

Ainsi $\mathcal{O}(-k)$ et $\mathcal{O}(k)$ sont isomorphes en tant que fibrés réels, ce qui reflète précisément le fait que l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ sur $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ n'est pas triviale : elle identifie $\mathcal{O}(-k)$ à $\mathcal{O}(k)$.

2.2. Notions de topologie différentielle. Cette section traite de connexions linéaires, d'approximation de fonctions continues par des fonctions lisses, et de transversalité, avec la mise en évidence de certaines applications importantes en théorie de l'homotopie.

2.2.1. Rappels sur les connexions. Le fait de travailler avec des fibrés vectoriels lisses sur des variétés présente comme avantage la possibilité d'utiliser les connexions linéaires. De façon intuitive, une connexion sur un fibré est une donnée supplémentaire qui permet de se déplacer depuis une fibre vers les fibres voisines. Autrement dit, c'est un moyen de "connecter" les fibres voisines. Le lecteur est invité à noter le fait qu'un tel mouvement n'est pas canoniquement défini dans un fibré "nu".

Nous discutons dans cette section les connexions en adoptant le point de vue des dérivées covariantes, et nous renvoyons le lecteur à l'Annexe A pour des compléments en lien avec la notion de distribution horizontale. Les Corollaires 2.7 et 2.8 ci-dessous démontrent en particulier les Affirmations 1 et 2 de la preuve précédente.

Notation. Étant donné un fibré E sur une base B et un entier $k \geq 0$, l'on note

$$\Omega^k(B, E) = \Gamma(\Lambda^k T^*B \otimes E)$$

l'espace des k -formes sur B à valeurs dans E . Ce sont les familles lisses d'applications k -multilinéaires alternées $T_p B \times \cdots \times T_p B \rightarrow E_p$, $p \in B$. L'on a par définition $\Omega^0(B, E) = \Gamma(E)$.

Définition 2.2. Une connexion linéaire est une application \mathbb{R} -linéaire

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(B, E)$$

(lue "nabla") qui vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s, \quad f \in \mathcal{F}(B).$$

Autrement dit, une connexion linéaire est une dérivation sur $\Gamma(E)$ par rapport à sa structure de $\mathcal{F}(B)$ -module. De façon explicite, pour tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(B)$, l'on a $\nabla_X s \in \Gamma(E)$ et

$$\nabla_X(fs) = df(X)s + f\nabla_X s, \quad \nabla_{fX}s = f\nabla_X s.$$

Lemme 2.3. La valeur de $\nabla_X s$ en un point $p \in B$ ne dépend que de la valeur de $X(p)$ et des valeurs de s au voisinage de p le long d'une courbe tangente à $X(p)$.

Démonstration. Montrons que, pour s fixée, la valeur $\nabla_X s|_p$ ne dépend que de $X(p)$. Montrons d'abord que celle-ci ne dépend que du germe de X en p : soit $f \in \mathcal{F}(B)$ avec $f(p) = 1$ et à support dans un voisinage U fixé de p ; alors $\nabla_{fX}s|_p = f(p)\nabla_X s|_p = \nabla_X s|_p$, ce qui prouve que cette dernière quantité ne dépend que de $X|_U$. Montrons maintenant que $\nabla_X s|_p$ ne dépend que de $X(p)$. Par linéarité en X il suffit de montrer

que $\nabla_X s|_p = 0$ si $X(p) = 0$. Par ce qui précède l'on peut supposer que X est à support compact dans un ouvert de carte (x^1, \dots, x^n) dans B , sur lequel on peut écrire $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ avec X^i des fonctions qui s'annulent en p . Quitte à multiplier par une fonction de troncature supportée dans l'ouvert de carte et égale à 1 sur le support de X , l'on peut étendre les $\frac{\partial}{\partial x^i}$ en des champs de vecteurs sur B pour lesquels on a encore $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, et finalement $\nabla_X s|_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s|_p = 0$.

Montrons maintenant que, à $X(p)$ fixé, la valeur $\nabla_X s|_p$ ne dépend que des valeurs de s au voisinage de p le long d'une courbe tangente à $X(p)$. Un argument semblable à celui du paragraphe précédent montre que $\nabla_X s|_p$ ne dépend que du germe de s en p : l'on considère une fonction $f \in \mathcal{F}(B)$ avec $f(p) = 1$ et à support dans un voisinage U fixé de p , pour laquelle on obtient $\nabla_X(fs)|_p = X_p(f)s(p) + f(p)\nabla_X s|_p = \nabla_X s|_p$. L'on peut donc supposer sans perte de généralité que s est à support compact dans un ouvert de trivialisatation U pour E . En notant (e_1, \dots, e_k) un repère local sur U , que l'on peut étendre en un système de k sections globales de E en multipliant par une fonction de troncature égale à 1 sur le support de s , l'on peut écrire $s = \sum_{i=1}^k s^i e_i$ avec s^i des fonctions à support compact. L'on obtient alors

$$\nabla_X s|_p = \sum_{i=1}^k X_p(s^i) e_i(p) + s^i(p) \nabla_X e_i.$$

La conclusion en découle puisque les quantités $X_p(s^i)$, $i = 1, \dots, k$ ne dépendent que des valeurs des s^i au voisinage de p le long d'une courbe tangente à $X(p)$. \square

Soit $\gamma : I \rightarrow B$ une courbe lisse avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une *section de E le long de γ* est une courbe lisse $s : I \rightarrow E$ telle que $\pi \circ s = \gamma$; de façon équivalente, c'est une section de $\gamma^* E$. Le lemme précédent et sa preuve suggèrent la définition suivante.

Proposition-Définition 2.4 (cf. Gallot-Hulin-Lafontaine 2.68). *Il existe un unique opérateur*

$$\nabla_t : \Gamma(\gamma^* E) \rightarrow \Gamma(\gamma^* E)$$

qui vérifie les conditions suivantes :

(i) *pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et toute section $s \in \Gamma(\gamma^* E)$, l'on a*

$$\nabla_t(fs)|_t = f'(t)s(t) + f(t)\nabla_t s|_t.$$

(ii) *si $s \in \Gamma(\gamma^* E)$ est la restriction à l'image de γ d'une section \tilde{s} définie sur un voisinage, alors*

$$\nabla_t s|_t = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{s}|_{\gamma(t)}.$$

\square

L'on appelle l'opérateur ∇_t *dérivée covariante le long de γ* . L'on renvoie à *loc. cit.* pour les détails de la preuve et nous donnons ici simplement la définition de ∇_t : étant donné un repère local (e_1, \dots, e_k) au voisinage de $\gamma(t)$, l'on écrit $s = \sum_{i=1}^k s^i(t)e_i(\gamma(t))$ et l'on pose

$$\nabla_t s|_t = \sum_{i=1}^k \frac{ds^i}{dt} e_i(\gamma(t)) + s^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} e_i|_{\gamma(t)}.$$

L'un des points qu'il faut retenir de cette définition est que, alors même qu'une section de E le long de γ peut ne pas provenir d'une section définie au voisinage (par exemple si γ est constante et s ne l'est pas), néanmoins elle peut toujours s'écrire localement en t comme combinaison linéaire à coefficients dépendant de t de sections qui sont définies au voisinage de γ .

Exercice 3. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application lisse et E un fibré sur Y . Montrer que toute connexion sur E induit naturellement une connexion sur f^*E . Montrer que la dérivée covariante ∇_t le long d'une courbe γ est la connexion induite par ∇ sur γ^*E .

Définition 2.5. Une section s définie le long d'une courbe γ est dite horizontale si

$$\nabla_t s = 0.$$

Proposition-Définition 2.6. Soit $\gamma : I \rightarrow B$ une courbe lisse. Pour tout $v \in E_{\gamma(t_0)}$ il existe une unique section horizontale s_v définie le long de γ telle que $s_v(t_0) = v$.

L'application

$$\tau_{t_0, t_1}^\gamma : E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}, \quad v \mapsto s_v(t_1)$$

est un isomorphisme linéaire. On l'appelle transport parallèle le long de γ .

Avant de donner la preuve de cette proposition importante, faisons quelques remarques préliminaires.

Remarques.

(1) L'espace des connexions sur un fibré E donné est un espace affine sur $\Omega^1(B, \text{End}(E))$. En effet, l'on vérifie sans peine que la différence de deux connexions est bien un élément de $\Omega^1(B, \text{End}(E))$ par un argument similaire à ceux du lemme 2.3 en utilisant le fait que cette différence est $\mathcal{F}(B)$ -linéaire en s .

(2) L'espace des connexions sur un fibré E est non-vide. En effet, il existe toujours une connexion sur la restriction de E à un ouvert U de trivialisations : les sections de $E|_U$ s'identifient aux fonctions $U \rightarrow \mathbb{K}^k$ et la différentielle des fonctions détermine la connexion "triviale"

$$d_X(s^1, \dots, s^k) := (ds^1 \cdot X, \dots, ds^k \cdot X).$$

Sur une variété quelconque, l'on considère un recouvrement (U_i) par des ouverts de trivialisations, une partition de l'unité subordonnée (ρ_i) , une collection de connexions ∇^i sur $E|_{U_i}$, et l'on construit une connexion globale par la formule

$$\nabla_X s := \sum_i \nabla_{X|_{U_i}}^i (\rho_i s) = \sum_i \rho_i \nabla_{X|_{U_i}}^i s.$$

Démonstration de la Proposition 2.6. Plaçons-nous sur un ouvert U de trivialisations au voisinage de $\gamma(t_0)$ et considérons t_1 tel que $\gamma([t_0, t_1]) \subset U$. Soit d la connexion triviale sur $E|_U$ et écrivons $\nabla = d - A$, avec $A \in \Omega^1(U, \text{End}(E))$. L'on vérifie alors à partir de la définition que

$$\nabla_t s = d_t s - (A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))(s).$$

Si l'on identifie s à un vecteur de fonctions $s = (s^1, \dots, s^k) : I \rightarrow \mathbb{K}^k$, alors $d_t s = \frac{ds}{dt}$. Ainsi s est horizontale si et seulement si elle vérifie l'équation différentielle *linéaire*

$$\frac{ds}{dt} = (A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)) \cdot s.$$

L'on conclut par le fait que le flot d'une équation différentielle linéaire est une famille d'isomorphismes linéaires. Ceci achève la preuve lorsque t_1 est proche de t_0 . Pour t_1 arbitraire l'on découpe l'intervalle I en sous-intervalles suffisamment petits et l'on utilise le fait que le flot d'une équation différentielle linéaire est toujours défini globalement. \square

Corollaire 2.7. *Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ deux applications homotopes et E un fibré vectoriel sur Y . Les fibrés induits $f_0^* E$ et $f_1^* E$ sont alors isomorphes.*

Démonstration. Soit $f : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie lisse (!) et considérons le fibré induit $f^* E$. Celui-ci admet une connexion linéaire. Le transport parallèle le long des courbes $\{x\} \times [0, 1]$, $x \in X$, réalise un isomorphisme entre $f_0^* E$ et $f_1^* E$. Ici l'on utilise le fait que le flot d'une équation différentielle à paramètre dépend de façon lisse du paramètre. (Dans notre cas, l'espace des paramètres est la variété X .) \square

Corollaire 2.8. *Soit E un fibré vectoriel sur une variété contractile. Alors E est isomorphe au fibré trivial.*

Démonstration. Soit B la base de E . Par définition, le fait que B soit contractile signifie que Id_B est homotope à une application constante. Or l'identité induit sur B de façon tautologique le fibré E , alors que toute application constante induit sur B le fibré trivial. L'on conclut par le corollaire précédent. \square

2.2.2. *Approximation de fonctions et homotopie.* Dans ce chapitre nous discutons quelques résultats d'approximation d'applications C^0 ou C^k entre variétés par des applications C^∞ , avec des conséquences homotopiques. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 2 du livre de M.W. Hirsch pour une discussion approfondie.

L'on considère les espaces d'applications $C^r(X, Y)$ de classe C^r , $r \geq 0$ entre deux variétés lisses. L'on suppose pour simplifier que la source X est compacte.

Nous munissons $C^r(X, Y)$, $0 \leq r < \infty$ de la topologie engendrée par les ouverts $\mathcal{N}^r(f, (U, \varphi), (V, \psi), K, \epsilon)$ suivants. Pour tout choix de cartes (U, φ) , (V, ψ) sur X , respectivement Y , pour tout choix de compact $K \subset U$ et pour tout choix de réel positif $\epsilon > 0$, étant donnée $f \in C^r(X, Y)$ l'on pose

$$\mathcal{N}^r(f, (U, \varphi), (V, \psi), K, \epsilon)$$

l'ensemble des applications $g \in C^r(X, Y)$ telles que

$$\|\psi g \varphi^{-1} - \psi f \varphi^{-1}\|_{C^r(K, V)} < \epsilon.$$

Remarque. Ceci est la définition de la "topologie faible" sur $C^r(X, Y)$, qui coïncide avec la "topologie forte" lorsque X est compacte. C'est une topologie métrisable, qui admet une métrique de définition complète et une base dénombrable. Ainsi $C^r(X, \mathbb{R}^k)$ est un espace de Banach.

Remarque. Lorsque $r = 0$, cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme déterminée par n'importe quel choix de métrique compatible avec la structure différentielle de Y .

L'espace $C^\infty(X, Y)$ est muni de la topologie donnée par la réunion des topologies induites via les inclusions $C^\infty(X, Y) \hookrightarrow C^r(X, Y)$, $0 \leq r < \infty$.

Théorème 2.9. $C^\infty(X, Y)$ est dense dans $C^r(X, Y)$, $r \geq 0$.

Démonstration. Il suffit de donner la preuve pour $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, qui est le modèle local. Le point clé est de considérer une suite régularisante $\chi_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$, $\nu \geq 1$ constituée d'applications C^∞ telles que

$$\text{supp } \chi_\nu \subset B(0, \frac{1}{\nu}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\nu = 1.$$

Étant donnée $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, la convolution

$$\chi_\nu * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\nu(x - y) f(y) dy$$

est lisse, elle converge en topologie C^r vers f , et $\text{supp } \chi_\nu * f \subset \text{supp } f + B(0, \frac{1}{\nu})$, de sorte que cette construction locale peut être implantée sur une variété en utilisant une partition de l'unité. \square

Une variante utile de ce résultat est la suivante :

Corollaire 2.10. *Soit $A \subset X$ un fermé et $f \in C^r(X, Y)$ lisse au voisinage de A . Il existe une suite d'applications $f_\nu \in C^\infty(X, Y)$, $\nu \geq 1$ qui coïncident avec f au voisinage de A et telles que $f_\nu \xrightarrow{C^r} f$, $\nu \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème d'approximation 2.9 à la fonction $(1 - \chi)f$, avec $\chi : X \rightarrow [0, 1]$ une fonction de troncature lisse supportée au voisinage de A et égale à 1 au voisinage de A . \square

Proposition 2.11. *Deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ qui sont C^0 -proches sont homotopes.*

Démonstration. Choisissons une métrique riemannienne sur Y . Puisque X est compacte, les images de f et g sont contenues dans un compact de Y , sur lequel le rayon d'injectivité de la métrique riemannienne est strictement positif. Notons-le $\epsilon > 0$. Dès que $\|f - g\|_{C^0} < \epsilon$, tous deux points $f(x)$ et $g(x)$ peuvent être reliés par une unique géodésique minimisante. En paramétrant celle-ci à vitesse constante comme $\gamma_x(t)$, $t \in [0, 1]$ l'application $(x, t) \mapsto \gamma_x(t)$, $x \in X$, $t \in [0, 1]$ réalise une homotopie entre f et g . \square

La discussion ci-dessus a comme conséquence directe les deux corollaires suivants.

Corollaire 2.12. *Deux applications lisses sont reliées par une homotopie continue si et seulement si elles sont reliées par une homotopie lisse.* \square

Ceci justifie le fait que, dans l'énoncé et la preuve du théorème 2.1, nous n'avons pas précisé si l'on travaille avec des classes d'homotopie lisses ou continues.

Corollaire 2.13. *Tout invariant par homotopie lisse défini pour des applications lisses admet une unique extension en un invariant par homotopie continue défini pour des applications continues.* \square

Par exemple, toute application lisse $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme $f^* : H_{DR}^*(Y) \rightarrow H_{DR}^*(X)$ en cohomologie de De Rham. Les arguments ci-dessus montrent que l'on peut aussi définir un tel morphisme f^* pour toute application f continue, de sorte que la relation fondamentale $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ soit toujours vérifiée. À titre d'exemple, ceci fournit une preuve directe du théorème de Brouwer C^0 : *il n'existe pas d'application continue $B^n \rightarrow S^{n-1}$ qui étende $\text{Id}_{S^{n-1}}$* . Cet énoncé implique de manière classique le théorème de point fixe de Brouwer : *toute application continue $B^n \rightarrow B^n$ possède un point fixe*.

La possibilité de définir un morphisme induit en cohomologie de De Rham pour les applications continues est par ailleurs une indication

du fait que la cohomologie de De Rham est un invariant de nature topologique. En effet, celle-ci est isomorphe à la cohomologie singulière à coefficients réels.

2.2.3. *Transversalité.* La notion de transversalité permet d'utiliser des méthodes de géométrie différentielle en topologie algébrique.

Définition 2.14. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application différentiable et $Z \subseteq Y$ une sous-variété. L'on dit que f est transverse à Z si la condition suivante est vérifiée : pour tout point $x \in X$ tel que $f(x) \in Z$, l'on a

$$df_x(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y.$$

Dans ce cas on utilise la notation

$$f \pitchfork Z,$$

lue “ f est transverse à Z ” (Figure 3).

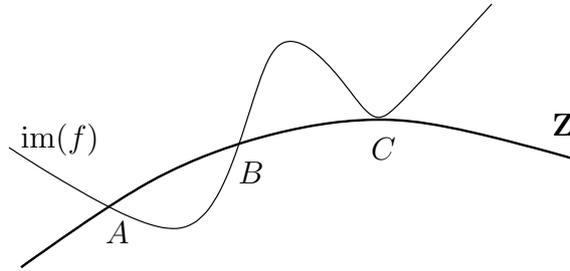


FIGURE 3. f est transverse à Z aux points A et B , mais pas au point C

Voici deux situations importantes :

- (i) Si $\dim X < \operatorname{codim} Z$, alors $f \pitchfork Z$ si et seulement si $\operatorname{im}(f) \cap Z = \emptyset$.
- (ii) Si $Z = \{p\}$ est un point, alors $f \pitchfork Z$ si et seulement si p est une valeur régulière pour f .

Proposition 2.15. Soit $f : X \rightarrow Y$ lisse et $Z \subseteq Y$ une sous-variété. Si $f \pitchfork Z$ alors $f^{-1}(Z) \subset X$ est une sous-variété de codimension égale à la codimension de Z .

Démonstration. Soit $\mathcal{U} \subset Y$ un voisinage tubulaire de Z , que l'on identifie à un voisinage de la section nulle dans le fibré normal à Z dans Y , noté $\nu_Y Z$. Soit $x \in X$ tel que $f(x) \in Z$. Considérons une trivialisations locale $\mathcal{U} \simeq U \times \mathbb{R}^{\operatorname{codim}(Z)}$ au-dessus d'un voisinage U de $f(x)$ dans Z . La condition de transversalité pour les points voisins de $f^{-1}(f(x))$ équivaut au fait que 0 est une valeur régulière de $\operatorname{pr}_2 \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^{\operatorname{codim}(Z)}$ dans cette trivialisations locale. Puisque $f^{-1}(Z) = (\operatorname{pr}_2 \circ f)^{-1}(0)$ au voisinage de $f^{-1}(f(x))$, la conclusion en découle. \square

La notion de transversalité peut être vue comme l'analogue “en famille” de la notion de valeur régulière pour une fonction. Rappelons que, étant donnée une fonction $f : X \rightarrow Y$, un point $p \in Y$ est une *valeur régulière* si la condition suivante est vérifiée : pour tout point

$x \in f^{-1}(p)$, la différentielle $df_x : T_x X \rightarrow T_p Y$ est surjective. Un point p est une *valeur critique* si ce n'est pas une valeur régulière, autrement dit si la condition suivante est vérifiée : il existe un point $x \in f^{-1}(p)$ tel que la différentielle $df_x : T_x X \rightarrow T_p Y$ n'est pas surjective (un tel point $x \in X$ est appelé *point critique*). Il est important de noter que tout point $p \in Y \setminus \text{im}(f)$ est par définition une valeur régulière. Par contraste, lorsque $p \in Y$ est une valeur critique alors $f^{-1}(p) \neq \emptyset$, aussi par définition.

Le prototype des théorèmes de transversalité est le théorème de Sard. Le lecteur pourra en trouver la démonstration par exemple dans le livre de M.W. Hirsch.

Théorème 2.16 (Théorème de Sard). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application lisse. L'ensemble de ses valeurs critiques est de mesure nulle dans Y . L'ensemble de ses valeurs régulières est dense dans Y .* \square

En appliquant le théorème de Sard à des espaces de fonctions appropriés vus comme des variétés de dimension infinie modelées sur des espaces de Banach, l'on peut démontrer le résultat suivant. À nouveau, l'on renvoie au livre de M.W. Hirsch pour une preuve et pour une discussion beaucoup plus détaillée du sujet.

Théorème 2.17. *Soient X, Y des variétés et $Z_1, \dots, Z_k \subseteq Y$ des sous-variétés. Soit $A \subset X$ un fermé, $A \subset U$ un voisinage ouvert de A dans X et $f : U \rightarrow Y$ une application lisse qui est transverse à tous les Z_i , $i = 1, \dots, k$. L'ensemble des applications lisses de X dans Y qui coïncident avec f sur un voisinage de A et qui sont simultanément transverses à tous les Z_i , $i = 1, \dots, k$ est dense dans l'espace des applications lisses dont le germe en A est donné par f .* \square

En particulier, toute application $X \rightarrow Y$ peut être approximée en norme C^0 par une application lisse qui lui est homotope et qui est transverse à une sous-variété donnée Z .

Une variante du théorème de transversalité est le suivant.

Théorème 2.18. *Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel. L'ensemble des sections de E qui sont transverses à la section nulle est dense dans $\Gamma(E)$.*

Remarque. Lorsqu'une certaine propriété est valable pour un sous-ensemble dense d'une certaine classe d'applications, l'on dit que la propriété en question est *générique*. Une situation emblématique est représentée par le cas des sous-ensembles qui sont denses en tant qu'intersections dénombrables d'ouverts denses dans un espace métrique complet (théorème de Baire). On parle alors de *généricité au sens de Baire*.

Voici une application des méthodes d'approximation et de transversalité au calcul des groupes d'homotopie des sphères.

Proposition 2.19. *Soit $n \geq 2$. L'on a*

$$\pi_k(S^n) = 0, \quad 1 \leq k < n.$$

Démonstration. Soit $f : (S^k, *) \rightarrow (S^n, *)$, $1 \leq k < n$ une application continue à point base. Soit $p \in S^n$ différent du point base. Par approximation et transversalité il existe $g : (S^k, *) \rightarrow (S^n, *)$ lisse, homotope à f et transverse à la sous-variété $Z = \{p\}$. Puisque $\dim S^k < \text{codim } Z$, l'on conclut que $\text{im}(g) \subset S^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$. Ce dernier espace étant contractile, g est homotope à une constante, donc f aussi. \square

Le fait que les sphères S^k , $k \geq 2$ soient simplement connexes a comme conséquence le fait important suivant.

Proposition 2.20. *Soit $(X, *)$ un espace topologique à point base admettant un revêtement universel $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$. Considérons un point base $\tilde{*} \in \tilde{X}$ tel que $\pi(\tilde{*}) = *$. Pour tout $k \geq 2$ l'application*

$$\pi_* : \pi_k(\tilde{X}, \tilde{*}) \rightarrow \pi_k(X, *), \quad [f] \mapsto [\pi \circ f]$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Nous démontrons ici que π_* est bijective. Le fait que π_* est un morphisme de groupes est un fait général, qui sera discuté lorsque nous décrirons en détail la structure de groupe sur les π_k , $k \geq 2$.

L'application π_* est surjective puisque toute application vers X ayant comme source un espace simplement connexe admet un relèvement en une application vers \tilde{X} .

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{*}) \\ & \nearrow \text{dotted arrow} & \downarrow \pi_* \\ (S^k, *) & \longrightarrow & (X, *) \end{array}$$

L'application π_* est injective puisque les homotopies se relèvent aussi à extrémités fixées. \square

Il est utile de rappeler ici un autre calcul fondamental. La preuve utilise des résultats sur les revêtements.

Proposition 2.21. *L'on a*

$$\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

et

$$\pi_k(S^1) = 0, \quad k \geq 2.$$

Démonstration. Utilisons le modèle $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et prenons comme point base $* = 1 \in S^1$. Le point clé est de remarquer le fait que le revêtement universel du cercle est $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$.

Puisque le revêtement universel du cercle est contractile, la Proposition 2.20 implique alors directement l'énoncé sur les π_k , $k \geq 2$.

Pour démontrer l'énoncé sur le π_1 nous associons à toute application continue $f : (S^1, *) \rightarrow (S^1, *)$ un *degré* $\deg f \in \mathbb{Z}$ défini comme suit. L'application f admet un relèvement unique $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(0) = 0$. La condition de relèvement est $\pi \tilde{f} = f \pi$, de sorte que $\tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$. L'on pose $\deg f = \tilde{f}(1)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1. \end{array}$$

L'on vérifie que deux applications homotopes ont même degré. Par ailleurs, tout entier est réalisé comme degré d'une application. En effet, $k = \deg(f : z \mapsto z^k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi le degré réalise une bijection

$$\deg : \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Le lecteur pourra vérifier que \deg est même un isomorphisme de groupes. \square

2.3. Fibrés vectoriels et homotopie.

La classification des fibrés sur les sphères suggère que la correspondance entre classes d'isomorphisme de fibrés de rang k sur une base quelconque et classes d'homotopies d'applications pourrait être vraie sur une base quelconque. C'est effectivement le cas.

2.3.1. *Variétés de Stiefel et variétés de Grassmann.* On note $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$ la *variété de Stiefel*, dont les points sont les tuples de k vecteurs dans \mathbb{K}^n linéairement indépendants sur \mathbb{K} , encore appelés *k-repères*. L'ensemble $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$ est naturellement un ouvert de $(\mathbb{K}^n)^{\times k}$ et hérite de ce fait une structure naturelle de variété.

Le groupe de Lie $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ agit proprement et librement sur $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$ et le quotient

$$G_{n,k}^{\mathbb{K}} = V_{n,k}^{\mathbb{K}} / \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$$

hérite de ce fait d'une structure naturelle de variété pour laquelle la projection $V_{n,k}^{\mathbb{K}} \rightarrow G_{n,k}^{\mathbb{K}}$ est un $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ -fibré principal. L'on a donc en particulier une fibration localement triviale

$$\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}) \hookrightarrow V_{n,k}^{\mathbb{K}} \rightarrow G_{n,k}^{\mathbb{K}}.$$

Les points de $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$ peuvent être interprétés comme les sous-espaces de dimension k dans \mathbb{K}^n . L'on appelle $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$ *variété de Grassmann*, ou encore *grassmannienne des k-plans dans \mathbb{K}^n* .

L'on a

$$\dim_{\mathbb{K}} V_{n,k}^{\mathbb{K}} = kn, \quad \dim_{\mathbb{K}} G_{n,k}^{\mathbb{K}} = k(n - k).$$

Le grassmannienne $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$ est naturellement la base d'un fibré de rang k sur \mathbb{K} appelé *fibré tautologique*, noté $\gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$, dont la fibre au-dessus d'un point V désignant un sous-espace $V \subset \mathbb{K}^n$ de dimension k est l'espace V lui-même. La structure de fibré de $\gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$ peut être décrite de manière rigoureuse comme suit. L'action de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ sur $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$ admet une extension naturelle au fibré trivial

$$V_{n,k}^{\mathbb{K}} \times \mathbb{K}^k \rightarrow V_{n,k}^{\mathbb{K}}.$$

Celle-ci est encore propre et libre, et aussi linéaire dans les fibres. Par conséquent le quotient hérite d'une structure naturelle de fibré vectoriel. Par ailleurs, un point du quotient s'identifie naturellement à une paire (V, v) avec $V \in G_{n,k}^{\mathbb{K}}$ et $v \in V$.

Exercice. Soit $\pi : V_{n,k}^{\mathbb{K}} \rightarrow G_{n,k}^{\mathbb{K}}$. Montrer que $\pi^* \gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$ est trivial.

Exercice. La variété $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$ est compacte.

Il existe des plongements naturels

$$V_{n,k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow V_{n+1,k}^{\mathbb{K}}, \quad G_{n,k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow G_{n+1,k}^{\mathbb{K}}$$

et aussi

$$\gamma_{n,k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow \gamma_{n+1,k}^{\mathbb{K}}$$

induits par le plongement $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, $v \mapsto (v, 0)$. L'on note

$$V_k^{\mathbb{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{n,k}^{\mathbb{K}}, \quad G_k^{\mathbb{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n,k}^{\mathbb{K}}$$

et

$$\tau_k^{\mathbb{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$$

les limites directes déterminées par ces systèmes dirigés de plongements. Alors $\tau_k^{\mathbb{K}}$ est un fibré localement trivial sur $G_k^{\mathbb{K}}$.

2.3.2. Théorème de classification. Étant donnés deux espaces topologiques X et Y , l'on note $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X dans Y .

Théorème 2.22. *Soit B une variété, $k \geq 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. L'application*

$$[B, G_k^{\mathbb{K}}] \longrightarrow \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{K}}(B), \quad f \mapsto f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}$$

est une bijection.

Nous allons au fait démontrer la version plus fine suivante.

Théorème 2.23. *Soit B^n une variété de dimension n , $k \geq 1$ un entier.*

(i) Le cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'application

$$[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \longrightarrow \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{R}}(B), \quad f \mapsto f^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$$

est une bijection pour tout $s > k + n$.

Pour $s' \geq s > k + n$, l'inclusion $G_{s,k}^{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{s',k}^{\mathbb{R}}$ induit une bijection $[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \xrightarrow{\sim} [B, G_{s',k}^{\mathbb{R}}]$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] & \longrightarrow & [B, G_{s',k}^{\mathbb{R}}] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{R}}(B). \end{array}$$

(i) Le cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'application

$$[B, G_{s,k}^{\mathbb{C}}] \longrightarrow \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{C}}(B), \quad f \mapsto f^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{C}}$$

est une bijection pour tout s tel que $2(s - k) + 1 > n$.

Pour deux tels choix $s' \geq s$, l'inclusion $G_{s,k}^{\mathbb{C}} \hookrightarrow G_{s',k}^{\mathbb{C}}$ induit une bijection $[B, G_{s,k}^{\mathbb{C}}] \xrightarrow{\sim} [B, G_{s',k}^{\mathbb{C}}]$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [B, G_{s,k}^{\mathbb{C}}] & \longrightarrow & [B, G_{s',k}^{\mathbb{C}}] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{C}}(B). \end{array}$$

Étant donné un fibré ξ , une application $f : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{K}}$ telle que $f^*\gamma_{s,k}^{\mathbb{K}} \simeq \xi$ est appelée *application classifiante pour ξ* .

Nous verrons au cours de la preuve que tout fibré $\xi \rightarrow B^n$ de rang k sur \mathbb{R} admet une application classifiante $f : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$ dès que $s \geq k + n$, et que la classe d'homotopie de celle-ci est unique dès que $s > k + n$. (Dans le cas complexe, les conditions $s - k \geq n$ et $s - k > n$ doivent être remplacées par les conditions plus faibles $2(s - k) + 1 \geq n$, respectivement $2(s - k) + 1 > n$.)

Il est utile de commencer par la caractérisation suivante des tirés en arrière. Étant donnés deux fibrés $\xi \xrightarrow{\pi_\xi} M$, $\eta \xrightarrow{\pi_\eta} N$, on appelle *morphisme de fibrés* un couple (F, f) avec $F : \xi \rightarrow \eta$, $f : M \rightarrow N$ tels que $\pi_\eta F = f \pi_\xi$ et $F|_{\xi_x} : \xi_x \rightarrow \eta_{f(x)}$ linéaire pour tout $x \in M$. L'on dira aussi dans cette situation que F est un *morphisme de fibrés qui relève f* , ou encore que F est un *morphisme de fibrés au-dessus de f* .

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{F} & \eta \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ M & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

Lemme 2.24. *Soient $\xi \rightarrow M$, $\eta \rightarrow N$ deux fibrés et $f : M \rightarrow N$ une application continue. Alors $\xi \simeq f^*\eta$ si et seulement si il existe un morphisme de fibrés $F : \xi \rightarrow \eta$ qui relève f et qui est bijectif sur les fibres.*

Démonstration. Il est clair que le fibré $f^*\eta$ admet un morphisme $f^*\eta \rightarrow \eta$ qui relève f et qui est bijectif sur les fibres : puisque $(f^*\eta)_x = \eta_{f(x)}$, l'on pose $F|_{(f^*\eta)_x} = \text{id}_{\eta_{f(x)}}$.

Réciproquement, supposons que ξ admet un morphisme $F : \xi \rightarrow \eta$ qui relève f et qui est bijectif dans les fibres. Pour montrer $\xi \simeq f^*\eta$ il suffit de vérifier que le couple (ξ, F) vérifie propriété d'universalité du tiré en arrière : pour tout fibré $\xi' \rightarrow M$ et tout morphisme $F' : \xi' \rightarrow \eta$ qui relève f , il existe un unique morphisme de fibrés $\Theta : \xi' \rightarrow \xi$ au-dessus de l'identité de M tel que $F' = F \circ \Theta$.

$$\begin{array}{ccccc} \xi' & & & & \eta \\ & \searrow^{F'} & & & \downarrow \pi_\eta \\ & & \xi & \xrightarrow{F} & \eta \\ & \searrow^{\Theta} & \downarrow \pi_\xi & & \\ & & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Notons $F_p = F|_{\xi_p}$, $F'_p = F'|_{\xi'_p}$. L'on doit alors nécessairement avoir $\Theta(p, v) = (p, F_p^{-1}(F'_p(v)))$ pour tout $p \in M$ et $v \in \xi'_p$. L'on vérifie

par ailleurs que cette expression définit bien une application de même régularité que celle de F et F' , puisque l'inversion dans $GL(V)$ est de classe C^∞ pour tout espace vectoriel V . Ainsi $\Theta : \xi' \rightarrow \xi$ est un morphisme de fibrés au-dessus de Id_M qui est bijectif sur les fibres. \square

Afin de présenter un fibré ξ comme tiré en arrière du fibré tautologique sur la grassmannienne nous sommes donc amenés à exhiber des morphismes de fibrés $\xi \rightarrow \gamma_{s,k}^{\mathbb{K}}$ bijectifs sur les fibres. La remarque qui suit montre que cette dernière question peut être reformulée de façon avantageuse.

Lemme 2.25. *Soit $\xi \rightarrow B$ un fibré de rang k sur \mathbb{K} . Les morphismes de fibrés bijectifs sur les fibres $\xi \rightarrow \gamma_{s,k}^{\mathbb{K}}$ sont en correspondance bijective canonique avec les morphismes de fibrés $\xi \rightarrow B \times \mathbb{K}^s$ qui sont injectifs dans les fibres.* \square

En vue de cette discussion, le théorème de classification sera impliqué par le théorème de prolongement suivant.

Théorème 2.26. *Soit $\xi \rightarrow B^n$ un fibré de rang k sur \mathbb{K} . Soit $A \subseteq B$ un fermé et $A \subset U$ un voisinage ouvert de A dans B .*

Soit $F : \xi|_U \rightarrow U \times \mathbb{K}^s$ un morphisme de fibrés injectif dans les fibres. Si $s \geq k + n$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, respectivement $2(s - k) + 1 \geq n$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe un morphisme de fibrés $\xi \rightarrow B \times \mathbb{K}^s$ qui est injectif dans les fibres et qui coïncide avec F au-dessus d'un voisinage de A .

Remarque 2.27. *Il est utile de discuter la stratégie de preuve de ce théorème avant d'en donner les détails. Le point clé sera de démontrer le théorème localement sur B . Le fait qu'il soit formulé de façon relative, non pas comme un problème d'existence de morphismes définis au-dessus de B , mais comme un problème d'extension à B de morphismes déjà définis au-dessus d'un fermé arbitraire A , fait que la version locale se globalisera par un raisonnement purement formel. Ce schéma est fréquent en topologie algébrique. Le lecteur est invité à contempler le potentiel des énoncés formulés de manière relative : alors même qu'ils sont d'apparence plus lourde, leur efficacité est incomparablement plus grande que celle des versions "absolues". [Comparer aussi avec la discussion du 2.2.11 dans le livre de Hirsch.]*

Nous allons rencontrer une situation similaire avec la définition des groupes d'homotopie relatifs, ou encore de groupes de (co)homologie relative. Les invariants d'intérêt central sont les invariants absolus, mais le fait de définir des invariants relatifs permet de mettre en place des raisonnements inductifs pour calculer les invariants absolus.

Démonstration du Théorème 2.26.

Étape 1 : l'on démontre le théorème pour un fibré ξ trivial.

Notons à ce propos que la donnée d'une application $B \times \mathbb{K}^k \rightarrow B \times \mathbb{K}^s$ injective dans les fibres équivaut à la donnée d'une application

$$B \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}.$$

En effet, une famille d'applications linéaires de rang maximal $\mathbb{K}^k \hookrightarrow \mathbb{K}^s$ indexée par B est la même chose qu'une famille de k -repères dans \mathbb{K}^s indexée par B .

Soit $A \subset B$ un fermé. Nous souhaitons montrer que toute application $A \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}$ définie sur un voisinage U de A s'étend en une application $B \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}$ pour $s \geq k + n$ dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, respectivement pour $2(s - k) + 1 \geq n$ dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. (Notons au passage que ceci démontrera $\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{K}}) = 0$ pour $1 \leq i < s - k$ dans le cas réel et pour $1 \leq i < 2(s - k) + 1$ dans le cas complexe.)

Nous regardons $V_{s,k}^{\mathbb{K}} \subset L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$ comme l'ouvert constitué des applications linéaires de rang maximal égal à k . Ainsi

$$V_{s,k}^{\mathbb{K}} = L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s) \setminus \bigcup_{\rho=0}^{k-1} Z_{\rho},$$

avec

$$Z_{\rho} \subset L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$$

le sous-espace des applications linéaires de rang égal à $\rho \in \{0, \dots, k-1\}$.

Affirmation : $Z_{\rho} \subset L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$ est une sous-variété de codimension $(s - \rho)(k - \rho)$.

Cette affirmation démontre le théorème dans ce cadre. En effet, soit $f : U \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}$ donnée. Puisque $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^s)$ est contractile l'on peut étendre f après une éventuelle restriction à un voisinage de A dans U à une application $\tilde{f} : B \rightarrow L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$. Par le théorème de transversalité 2.17 (noter la formulation relative de ce dernier!), l'on trouve $\bar{f} : B \rightarrow L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$ dont le germe en A est donné par f et telle que \bar{f} est simultanément transverse à tous les Z_{ρ} , $\rho = 0, \dots, k-1$. Dans le cas réel nous avons

$$\min_{\rho} \text{codim}_{\mathbb{R}} Z_{\rho} = s - k + 1 > n = \dim B,$$

et dans le cas complexe nous avons

$$\min_{\rho} \text{codim}_{\mathbb{R}} Z_{\rho} = 2(s - k + 1) > n = \dim B.$$

La condition de transversalité équivaut dans les deux cas à ce que $\text{im}(\bar{f}) \cap Z_{\rho} = \emptyset$ pour tout ρ , ou encore

$$\text{im}(\bar{f}) \subset V_{s,k}^{\mathbb{K}}.$$

Ainsi \bar{f} fournit l'extension souhaitée.

Démonstration de l'affirmation. Soit $T \in Z_{\rho}$. Au voisinage de T , tout élément S de Z_{ρ} est déterminé par

- son noyau, qui est un sous-espace de \mathbb{K}^k de dimension $k - \rho$, proche de $\ker T$;
- son image, qui est un sous-espace de \mathbb{K}^s de dimension ρ , proche de $\text{im } T$;
- le comportement de S sur un supplémentaire de $\ker S$, que l'on peut choisir comme étant donné par un supplémentaire fixé de $\ker T$, à valeurs dans cette image.

En suivant [Hirsch, p. 78], considérons deux applications linéaires

$$\mathbb{K}^{\rho} \xrightarrow{i} \mathbb{K}^s \xrightarrow{p} \mathbb{K}^{\rho}$$

telles que i est injective et $\text{im } i$ est un supplémentaire de $\ker T$, p est surjective et $\ker p$ est un supplémentaire de $\text{im } T$ (Figure 4). Soit $\mathcal{N}(T) \subset Z_{\rho}$ un voisinage assez petit de T . L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &\rightarrow G_{k,k-\rho}^{\mathbb{K}} \times \text{GL}_{\rho}(\mathbb{K}) \times G_{s,\rho}^{\mathbb{K}}, \\ S &\mapsto (\ker S, pSi, \text{im } S) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme sur un ouvert du but. Son inverse est de classe C^{∞} (vérification directe) et réalise un plongement ouvert à valeurs dans Z_{ρ} , qui est donc une paramétrisation locale de Z_{ρ} . Ainsi Z_{ρ} est une sous-variété de $L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$. Puisque

$$\dim_{\mathbb{K}} G_{k,k-\rho}^{\mathbb{K}} \times \text{GL}_{\rho}(\mathbb{K}) \times G_{s,\rho}^{\mathbb{K}} = (k - \rho)\rho + \rho^2 + \rho(s - \rho),$$

l'on déduit

$$\text{codim}_{\mathbb{K}} Z_{\rho} = (s - \rho)(k - \rho).$$

Ainsi la codimension de Z_{ρ} décroît avec ρ et la codimension minimale est celle de Z_{k-1} , égale à $n - k + 1$ (sur \mathbb{K}).

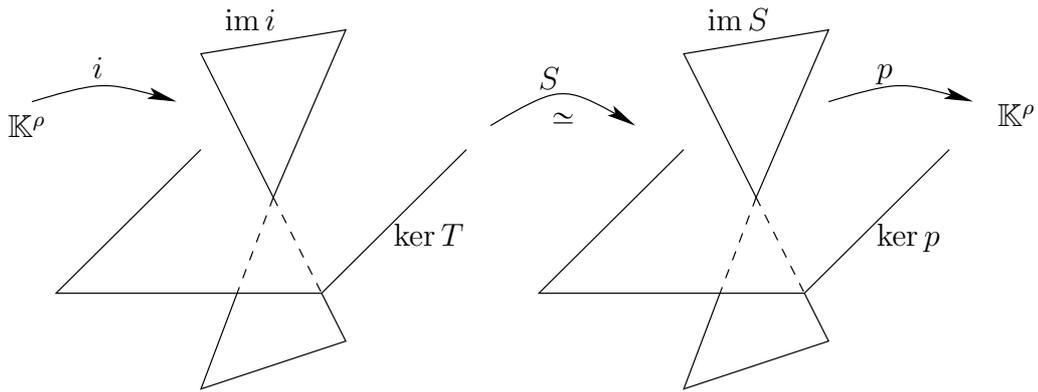


FIGURE 4

Étape 2 : l'on démontre le théorème dans le cas général.

Soit $\{X_i\}$ un recouvrement dénombrable fermé de B tel que ξ soit trivial sur un voisinage de X_i pour tout i . L'on construit par récurrence

sur $p \geq 1$ une extension F_p de $F|_{A \cap \bigcup_{i=1}^p X_i}$ à un voisinage de $\bigcup_{i=1}^p X_i$ qui coïncide avec F sur un voisinage de $A \cap \bigcup_{i=1}^p X_i$.

Pour $p = 1$, ceci découle de l'étape 1 appliquée à un voisinage de X_1 et au fermé $A \cap X_1$.

Supposons maintenant avoir construit F_p . Nous construisons F_{p+1} de la manière suivante. L'étape 1 appliquée à un voisinage de X_{p+1} et au fermé $(A \cap \bigcup_{i=1}^p X_i) \cap X_{p+1}$ fournit une application g définie au voisinage de X_{p+1} qui se recolle à l'application F_p par construction. Ensemble, elles fournissent l'application F_{p+1} recherchée. \square

Démonstration du théorème 2.23. Nous donnons la preuve dans le cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ étant en tout point analogue.

Pour tout $s \geq k+n$ l'application $[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \rightarrow \mathcal{Vect}_k^{\mathbb{R}}(B)$ est surjective. En effet, il suffit d'appliquer le Théorème de prolongement 2.26 avec $A = \emptyset$ pour trouver un morphisme de fibrés $F : \xi \rightarrow B \times \mathbb{R}^s$ injectif dans les fibres. En posant $f : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$, $f(p) = F(\xi_p)$ l'on aura $\xi \simeq f^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$.

Soit maintenant $s > k+n$ et montrons que deux telles applications classifiantes $f_0, f_1 : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$ sont homotopes. L'on fixe des isomorphismes $\xi \simeq f_i^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$, $i = 0, 1$, qui déterminent des morphismes de fibrés $F_i : \xi \rightarrow B \times \mathbb{R}^s$, $i = 0, 1$ injectifs dans les fibres. L'on applique maintenant le Théorème de prolongement 2.26 au fibré $\text{pr}_1^* \xi \rightarrow B \times [0, 1]$, avec $A = B \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ et F donné par F_i au voisinage de $B \times \{i\}$, $i = 0, 1$ et l'on trouve une extension $F' : \text{pr}_1^* \xi \rightarrow B \times [0, 1] \times \mathbb{R}^s$ qui est un morphisme de fibrés injectif dans les fibres. L'application $f : B \times [0, 1] \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$ donnée par $f(p, t) = F'((\text{pr}_1^* \xi)_{p,t})$ réalise alors une homotopie entre f_0 et f_1 .

Finalement, il est clair que l'inclusion $i : G_{s,k}^{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{s',k}^{\mathbb{R}}$, $s' \geq s$ rend commutatif le diagramme de l'énoncé puisque $i^* \gamma_{s',k}^{\mathbb{R}} = \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$. Puisque les deux flèches verticales de ce diagramme sont des bijections pour $s > k+n$, il s'ensuit que la flèche induite $[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \rightarrow [B, G_{s',k}^{\mathbb{R}}]$ est aussi une bijection. \square

Remarque 2.28. *Il s'ensuit de notre preuve que*

$$\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{R}}) = 0, \quad 1 \leq i < s - k$$

et

$$\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{C}}) = 0, \quad 1 \leq i < 2(s - k) + 1.$$

*En effet, soit $f : (S^i, *) \rightarrow (V_{s,k}^{\mathbb{K}}, *)$ une application continue. Par le Théorème de prolongement 2.26 appliqué au fibré trivial de rang k sur $B = D^{i+1}$, la boule de dimension $i+1$, avec $A = S^i$ et le morphisme de fibrés injectif dans les fibres $S^i \times \mathbb{K}^k \rightarrow S^i \times \mathbb{K}^s$ défini par f , fournit une extension de ce dernier à B , ce qui équivaut à une extension de f à la boule. Ainsi f est homotope à l'application constante.*

Les dimensions $s - k$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $2(s - k) + 1$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sont les premières dans lesquelles des groupes d'homotopie non-triviaux apparaissent. En effet, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.29. *L'on a*

$$\pi_{s-k}(V_{s,k}^{\mathbb{R}}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & s - k \text{ pair ou } k = 1, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & s - k \text{ impair et } k > 1, \end{cases}$$

et

$$\pi_{2(s-k)+1}(V_{s,k}^{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}.$$

□

Pour la preuve, le lecteur pourra consulter [Steenrod, 25.6].

Remarque. Nous obtenons en particulier

$$\pi_i(V_k^{\mathbb{K}}) = 0, \quad i \geq 1.$$

Ceci implique en particulier que $V_k^{\mathbb{K}}$ est contractile (Théorème de Whitehead, cf. la discussion de l'Annexe B).

Remarque. Le théorème de classification des fibrés réduit la théorie des fibrés vectoriels à une brache de la théorie de l'homotopie. Le théorème d'approximation lisse discuté plus haut a en particulier comme conséquence le fait suivant. Pour l'énoncer, introduisons la terminologie suivante : un fibré vectoriel au-dessus d'une variété lisse est dit *de classe C^r* , $r \geq 0$ s'il est défini par un 1-cocycle $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ de classe C^r .

Proposition 2.30. *Soit B une variété lisse. Tout fibré de classe C^r , $r \geq 0$ possède une structure de fibré de classe C^∞ qui lui est isomorphe dans la catégorie des fibrés de classe C^r . Cette structure de fibré C^∞ est unique à isomorphisme près.* □

Le lecteur est invité à démontrer ce résultat (cf. aussi [Hirsch 4.3.5]).

Remarque 2.31. *Considérons de la bijection*

$$[B, G_k^{\mathbb{K}}] \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(B), \quad [f] \mapsto f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}.$$

Se pose la question d'associer aux fibrés vectoriels des invariants de nature algébrique. Une manière cohérente de le faire est d'appliquer la stratégie suivante : soit $\alpha \in H^*(G_k^{\mathbb{K}})$ une classe de cohomologie fixée (cf. la discussion de la cohomologie dans les chapitres suivants). L'on définit

$$\alpha(\xi) = f^* \alpha \in H^*(B),$$

où $f^* : H^*(G_k^{\mathbb{K}}) \rightarrow H^*(B)$ est l'application induite en cohomologie. La classe $f^* \alpha$ est bien déterminée puisque l'application f^* induite en cohomologie ne dépend que de la classe d'homotopie de f . Pour toute application $h : B' \rightarrow B$ l'on a alors

$$\alpha(h^* \xi) = h^* \alpha(\xi).$$

En effet, si $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$ est une application classifiante pour ξ , alors $f \circ h : B' \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$ est une application classifiante pour $h^*\xi$, et les applications induites en cohomologie vérifient $(f \circ h)^* = h^*f^*$.

$$\begin{array}{ccccc}
 h^*\xi = (f \circ h)^*\gamma_k^{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \xi = f^*\gamma_k^{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \gamma_k^{\mathbb{K}} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B' & \xrightarrow{h} & B & \xrightarrow{f} & G_k^{\mathbb{K}}
 \end{array}$$

L'on appelle $\alpha(\xi)$ la valeur de la classe caractéristique déterminée par α sur le fibré ξ .

Bien évidemment, la portée de cette stratégie pour distinguer des classes d'isomorphisme de fibrés dépend en premier lieu de la richesse des groupes de cohomologie $H^*(G_k^{\mathbb{K}})$ des grassmanniennes. La question du calcul de ces groupes apparaît comme fondamentale.

2.4. Groupes d'homotopie. Les groupes d'homotopie jouent un rôle fondamental en topologie algébrique. En vue de la preuve du théorème de prolongement 2.26, ils peuvent notamment être interprétés comme fournissant des obstructions de nature algébrique à des problèmes de prolongement d'applications dont la source est donnée.

Définition 2.32. Soit $n \geq 0$ un entier. Choisissons un point base $*$ dans S^n . Soit X un espace topologique avec point base x_0 . On note

$$\pi_n(X, x_0)$$

l'ensemble des classes d'homotopie d'applications d'espaces topologiques à point base $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$. On appelle $\pi_n(X, x_0)$ le n -ème groupe d'homotopie de X (basé en x_0).

À titre d'exemple, en vue du fait que S^0 est l'ensemble constitué de deux points, $\pi_0(X, x_0)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X . C'est un ensemble à point base, donné par la composante connexe de x_0 . Les ensembles $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$ ne dépendent évidemment que de la composante connexe par arcs de x_0 dans X .

Les ensembles $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$ portent une structure de groupe. Lorsque $n = 1$, c'est la structure de groupe bien connue sur le groupe fondamental donnée par la concaténation des lacets. Pour décrire la structure de groupe lorsque $n \geq 2$ il est utile de voir $\pi_n(X, x_0)$ comme ensemble de classes d'homotopie d'applications continues

$$(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0),$$

avec $I^n = [0, 1]^n$ le cube unité dans \mathbb{R}^n et ∂I^n son bord. Étant données deux classes de telles applications représentées par f et g l'on définit

$$(2.1) \quad (f \cdot g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

De façon visuelle, la loi de composition est décrite par la Figure 5 ci-dessous.

$$\boxed{f} \cdot \boxed{g} = \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array}}$$

FIGURE 5. Loi de composition dans $\pi_2(X, x_0)$

Proposition 2.33. La loi de composition (2.1) ci-dessus définit une structure de groupe sur $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$. Les groupes $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$ sont commutatifs.

Démonstration. L'énoncé est bien connu dans le cas du groupe fondamental $n = 1$. Lorsque $n \geq 2$, l'inverse de $[f]$ est représenté par

$\bar{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$. La commutativité de la multiplication est démontrée en utilisant l'homotopie décrite par la Figure 6 ci-dessous.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline x_0 & g \\ \hline f & x_0 \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline g & x_0 \\ \hline x_0 & f \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}$$

FIGURE 6. Commutativité de $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$

□

2.4.1. *Homotopie libre.* Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ agit sur $\pi_n(X, x_0)$ par des automorphismes de groupes de la manière suivante. Soit $\gamma : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ un lacet à point base en x_0 et $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ un représentant de classe d'homotopie dans $\pi_n(X, x_0)$. Soit $I_{1/2}^n \subset I^n$ le cube obtenu en appliquant à I^n l'homothétie $h_{1/2}$ de rapport $1/2$ et dont le centre est le barycentre de I^n . On choisit un homéomorphisme $I^n \setminus \text{int } I_{1/2}^n \simeq \partial I^n \times [0, 1]$ avec $\partial I^n \simeq \partial I^n \times \{0\}$ et $\partial I_{1/2}^n \simeq \partial I^n \times \{1\}$ et l'on définit $\gamma \cdot f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ par

$$(\gamma \cdot f)(t) = \begin{cases} \gamma(\tau), & t = (t', \tau) \in I^n \setminus \text{int } I_{1/2}^n \simeq \partial I^n \times [0, 1], \\ f(h_{1/2}^{-1}(t)), & t \in I_{1/2}^n \end{cases}$$

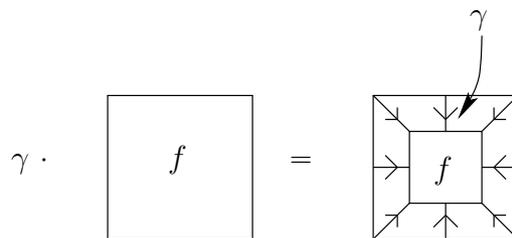
De façon heuristique, l'on met en évidence à l'intérieur de I^n un cube plus petit sur lequel on garde f (modulo un changement d'échelle), et l'on insère sur le collier extérieur le lacet γ le long des rayons, paramétré depuis ∂I^n vers le bord du cube intérieur (Figure 7). La classe d'homotopie de $\sigma \cdot f$ ne dépend que des classes d'homotopie de γ et f , et ceci définit un homomorphisme de groupes

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(X, x_0)), \quad n \geq 1.$$

Lorsque $n = 1$ ceci n'est rien d'autre que l'action de $\pi_1(X, x_0)$ sur lui-même par des automorphismes intérieurs

$$g \mapsto (h \mapsto ghg^{-1}).$$

Remarque. Soit X connexe par arcs. La même formule définit une action du groupoïde fondamental de X sur l'ensemble $\{\pi_n(X, x) : x \in X\}$. Rappelons qu'un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Le groupoïde fondamental a comme objets les points de X . L'ensemble des morphismes de x à y , noté $\pi_1(X, y, x)$, est par définition l'ensemble des classes d'homotopie à extrémités fixées de chemins continus de y vers x . La composition des morphismes est donnée par la composition de chemins. Pour

FIGURE 7. Action de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$

$[\gamma] \in \pi_1(X, x, y)$ et $[f] \in \pi_n(X, x)$, l'on a $[\gamma] \cdot [f] \in \pi_n(X, y)$ et l'application $[\gamma] \cdot : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, y)$ est un isomorphisme de groupes. L'on obtient donc une application

$$\pi_1(X, y, x) \rightarrow \text{Iso}(\pi_n(X, x), \pi_n(X, y)).$$

L'on note $\{\pi_n(X)\}$ l'ensemble $\{\pi_n(X, x) : x \in X\}$ muni de cette action du groupoïde fondamental et on l'appelle *le système local de fibre* $\pi_n(X, x)$ défini par l'action de π_1 .

Proposition 2.34. *Soit X un espace connexe par arcs. L'application canonique $\mathcal{L} : \pi_n(X, x_0) \rightarrow [S^n, X]$ qui associe à une classe d'homotopie à point base sa classe d'homotopie libre descend en une bijection*

$$\bar{\mathcal{L}} : \pi_n(X, x_0)/\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} [S^n, X].$$

Démonstration. Il est clair par définition que l'application \mathcal{L} descend au quotient : $\gamma \cdot f$ est librement homotope à f par un chemin d'applications $(I^n, \partial I^n) \mapsto (X, \gamma(t))$, $t \in [0, 1]$ (on retracts par déformation le cube I^n sur $I_{1/2}^n$).

L'application \mathcal{L} est surjective : étant donnée $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x)$, l'on choisit un chemin γ de x_0 à x . L'argument précédent montre que f est homotope librement à $\gamma \cdot f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$.

L'application $\bar{\mathcal{L}}$ est injective : soient $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$ deux éléments qui sont homotopes librement par une homotopie $F : I^n \times [0, 1] \rightarrow X$, $F(x, t) = F_t(x)$ telle que $F_0 = f$, $F_1 = g$ et $F_t|_{\partial I^n} = cte.$ pour tout $t \in [0, 1]$. On note $F_t|_{\partial I^n} = \gamma(t)$, de sorte que $\gamma : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ est un lacet basé en x_0 . L'homotopie

$$\bar{F}_t = \gamma|_{[0, t]} \cdot F_t, \quad t \in [0, 1]$$

est alors une homotopie d'applications $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ telle que $\bar{F}_0 = f$ et $\bar{F}_1 = \gamma \cdot g$. (Intuitivement, l'on fait "glisser" le point base de F_t vers x_0 le long de γ .) Ainsi $[f]$ et $[g]$ définissent le même élément dans le quotient $\pi_n(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)$. \square

2.4.2. *Suite exacte d'homotopie d'une fibration. Groupes d'homotopie relatifs.* Un outil clé pour calculer les groupes d'homotopie est la suite exacte longue d'une fibration. Celle-ci est un cas particulier de la suite exacte longue d'une paire, qui fait intervenir les groupes d'homotopie relatifs.

GROUPES D'HOMOTOPIE RELATIFS, SUITE EXACTE D'UNE PAIRE EN HOMOTOPIE. Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-espace. Choisissons un point base $x_0 \in A$, que l'on regarde aussi comme point base pour X . Une question importante est celle de comprendre les morphismes induits par l'inclusion

$$\pi_n(A, x_0) \subset \pi_n(X, x_0), \quad n \geq 0.$$

Une réponse structurée est donnée par le fait de définir les *groupes d'homotopie relatifs*. Soit $n \geq 1$. Décomposons ∂I^n comme union de la *face initiale* $I^{n-1} = \{t_n = 0\}$ et de l'union des autres faces qui constituent ∂I^n , que l'on note J^{n-1} . Ainsi

$$I^{n-1} \cup J^{n-1} = \partial I^n, \quad I^{n-1} \cap J^{n-1} = \partial I^{n-1}.$$

L'on note

$$\pi_n(X, A, x_0)$$

l'ensemble des classes d'homotopies d'applications

$$f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0).$$

Des arguments similaires en tout point à ceux de la section précédente montrent que $\pi_n(X, A, x_0)$ porte une structure de groupe pour $n \geq 2$, commutative pour $n \geq 3$. L'ensemble $\pi_1(X, A, x_0)$ ne possède pas de structure de groupe, mais il possède un point base donné par la classe d'homotopie de l'application constante égale à x_0 . Un point de cet ensemble est une classe d'homotopie de chemins dans X qui commencent dans A et qui aboutissent à x_0 .

Pour toute application de paires munies de points bases $(X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ l'on a un morphisme induit $\pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$. En particulier, l'inclusion $(X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$ induit un morphisme

$$\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0), \quad n \geq 1.$$

Par ailleurs, l'on a un morphisme canonique

$$\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0), \quad [f] \mapsto [f|_{I^{n-1}}], \quad n \geq 1.$$

Proposition 2.35. *Pour toute paire (X, A) avec point base $x_0 \in A$, les morphismes induits par les inclusions et le morphisme de bord ∂*

s'inèrent dans une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0). \end{aligned}$$

□

La démonstration de cette proposition consiste en une vérification directe.

Un mot d'explication est nécessaire concernant la partie finale de la suite exacte. En effet, les trois derniers termes ne portent pas de structure de groupe, mais sont seulement des ensembles à point base. Ainsi, la partie finale de la suite exacte

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0)$$

doit être interprétée comme une suite exacte d'ensembles avec point base au sens suivant.

Définition 2.36. *Une suite*

$$(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$$

d'applications entre ensembles à point base est dite exacte en (B, b) si

$$\text{im}(f) = g^{-1}(c).$$

L'exactitude de la suite d'homotopie en $\pi_1(X, A, x_0)$ signifie que les classes d'homotopie de chemins commençant sur A et aboutissant à x_0 qui sont représentées par des lacets dans X (basés en x_0) sont exactement celles pour lesquelles l'origine du chemin appartient à la composante connexe par arcs de x_0 dans A . L'exactitude de la suite d'homotopie en $\pi_0(A, x_0)$ signifie que les composantes connexes par arcs de A sur lesquelles peut se trouver l'origine d'un chemin dans X qui aboutit à x_0 sont exactement celles qui sont incluses dans la composante connexe par arcs de x_0 dans X . Ces deux affirmations sont tautologiques.

SUITE EXACTE HOMOTOPIQUE D'UNE FIBRATION. Soit $E \xrightarrow{p} B$ une fibration localement triviale. L'on choisit des points bases $b_0 \in B$ et $x_0 \in E_{b_0}$. L'on note $F = E_{b_0}$.

Proposition 2.37. *La projection induit des isomorphismes*

$$p_* : \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0), \quad n \geq 1.$$

Lorsque $n = 1$ l'on doit interpréter l'énoncé comme affirmant le fait que la projection induit une bijection.

La preuve de ce résultat utilise une propriété clé des fibrations, à savoir *la propriété de relèvement des homotopies*.

Proposition 2.38. Soit $E \xrightarrow{p} B$ une fibration localement triviale. Pour toute homotopie $h = (h_t) : X \times [0, 1] \rightarrow B$ et tout relèvement $\tilde{h}_0 : X \times \{0\} \rightarrow E$ de $h_0 = h(\cdot, 0)$ à E , de sorte que $p\tilde{h}_0 = h_0$, il existe un relèvement $\tilde{h} : X \times [0, 1] \rightarrow E$, $p\tilde{h} = h$ qui coïncide avec \tilde{h}_0 sur $X \times \{0\}$.

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Démonstration. Pour simplifier, faisons la preuve dans le cas d'une fibration localement triviale lisse, tous les espaces en question étant des variétés de dimension finie compactes. L'on choisit sur E une connexion, c'est-à-dire une distribution de rang égal à $\dim B$ transverse aux fibres. Le transport parallèle est globalement défini puisque les fibres sont compactes et fournit un relèvement de tous les chemins $h(x, \cdot)$, uniquement déterminé une fois que la condition initiale $\tilde{h}_0(x)$ est spécifiée, qui dépend de x avec le même degré de régularité que le relèvement \tilde{h}_0 et que l'homotopie h .

Lorsque les fibres ne sont pas compactes il faut choisir la connexion avec plus de soin, de sorte que le transport parallèle soit propre.

Dans le cas général des espaces topologiques la raisonnement est fait localement sur des petits ouverts de trivialisations et l'on doit supposer que la base B est paracompacte (ce qui est une hypothèse par défaut dans le cas des variétés). Si l'on souhaite avoir la propriété de relèvement des homotopies uniquement pour les CW-complexes (voir plus bas pour la définition), l'hypothèse de paracompacité sur la base n'est pas nécessaire. Le lecteur trouvera sans peine en cas de besoin les détails dans la littérature. \square

Dans la pratique l'on utilise (encore une fois!) une *version relative* de la propriété de relèvement des homotopies. Par définition, une application $E \xrightarrow{p} B$ satisfait la *propriété de relèvement des homotopies pour une paire* (X, A) si, pour toute homotopie $h = (h_t) : X \times [0, 1] \rightarrow B$ et pour tout relèvement $\tilde{h}_{0,A} : X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \rightarrow E$ tel que $p\tilde{h}_{0,A} = h|_{X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]}$, il existe un relèvement $\tilde{h} : X \times [0, 1] \rightarrow E$ tel que $p\tilde{h} = h$ qui prolonge $\tilde{h}_{0,A}$.

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{h}_{0,A}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Démonstration de la Proposition 2.37. Nous utilisons la propriété de relèvement des homotopies pour les cubes I^n , $n \geq 0$. Puisque la paire $(I^n \times I, I^n \times \{0\})$ est homéomorphe à la paire $(I^n \times I, I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I)$, l'on déduit de la Proposition 2.38 que la propriété de relèvement des homotopies est satisfaite pour les paires $(I^n \times I, I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I)$, $n \geq 0$. Plus généralement, la propriété de relèvement des homotopies est satisfaite pour toute paire consistant de $I^n \times I$ et du bord de ce cube privé de l'intérieur de l'une quelconque de ses faces.

p_* EST SURJECTIVE. Soit $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$. L'application constante égale à x_0 relève cette application sur $J^{n-1} = I^{n-1} \times \{1\} \cup (\partial I^{n-1}) \times I$. Ceci n'est rien d'autre que ∂I^n privé de l'intérieur de sa face initiale I^{n-1} et, par ce qui précède, nous obtenons un relèvement \tilde{f} sur I^n . Puisque $p\tilde{f} = f$ et $f|_{\partial I^n} = b_0$, l'on a $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$.

p_* EST INJECTIVE. Soient $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$ telles que $p\tilde{f}_0$ et $p\tilde{f}_1$ soient homotopes. Notons $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (B, b_0)$ une telle homotopie. L'on a un relèvement de G sur $I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup J^{n-1} \times I$, qui n'est rien d'autre que le bord du cube $I^n \times I$ privé de l'intérieur de la face $I^{n-1} \times I$, donné par \tilde{f}_0, \tilde{f}_1 , et respectivement x_0 . Nous obtenons alors un relèvement de G à $I^n \times I$, qui réalise une homotopie entre \tilde{f}_0 et \tilde{f}_1 . \square

Comme conséquence directe de la Proposition 2.37 et de la suite exacte longue d'une paire en homotopie appliquée à la paire (E, F) , nous obtenons le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.39. *Soit $E \xrightarrow{p} B$ une fibration localement triviale avec points bases $b_0 \in B$ et $x_0 \in E_{b_0}$. L'on note $F = E_{b_0}$ et $i : F \hookrightarrow E$ l'inclusion. L'on a une suite exacte longue en homotopie*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(E, x_0) \rightarrow \pi_0(B, b_0).$$

\square

Le théorème affirme en particulier que la fin de la suite exacte longue de la paire (E, F) peut être complétée par l'ensemble à point base $\pi_0(B, b_0)$, et aussi que la composition $\pi_1(E, x_0) \rightarrow \pi_1(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$ coïncide avec le morphisme induit par la projection au niveau du groupe fondamental $\pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$.

La description du morphisme de bord

$$\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0), \quad n \geq 1$$

est implicite dans la preuve de la Proposition 2.37 : étant donnée une classe $[f] \in \pi_n(B, b_0)$ représentée par une application $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow$

(B, b_0) , l'on la relève en une application $\tilde{f} : I^{n-1} \times I$ constante égale à x_0 sur $J^{n-1} = I^{n-1} \times \{1\} \cup (\partial I^{n-1}) \times I$. L'on a alors $\tilde{f}(I^{n-1}) \subset F$ puisque $p\tilde{f} = f$ et l'on pose

$$\delta[f] = [f|_{\partial I^{n-1}}].$$

Exercice. Utiliser la propriété de relèvement des homotopies pour montrer que ∂ est bien définie, et vérifier directement que c'est un morphisme de groupes pour $n \geq 2$.

Exemple 2.40. Nous avons vu précédemment que $\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{R}}) = 0$ pour $1 \leq i < s - k$ et $\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{C}}) = 0$ pour $1 \leq i < 2(s - k) + 1$. Ceci implique

$$\pi_i(V_k^{\mathbb{K}}) = 0, \quad \pi_i(V_k^{\mathbb{C}}) = 0, \quad i \geq 1.$$

Considérons maintenant pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ les fibrations localement triviales

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}) & \hookrightarrow & V_k^{\mathbb{K}} \\ & & \downarrow \\ & & G_k^{\mathbb{K}} \end{array}$$

La suite exacte d'homotopie pour chacune de ces deux fibrations montre en particulier les isomorphismes

$$\pi_n(G_k^{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})), \quad n \geq 1.$$

Exercice 4. Montrer que les isomorphismes $\pi_1(G_k^{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\cong} \pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ sont compatibles avec la structure de groupe naturelle de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$.

Montrer que les isomorphismes $\pi_n(G_k^{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$, $n \geq 2$ sont compatibles avec les actions respectives de $\pi_1(G_k^{\mathbb{K}})$ et $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$.

Cet exercice montre que les descriptions des fibrés vectoriels sur les sphères obtenues dans les sections 2.1 et 2.3.2 sont équivalentes, en prenant en compte la Proposition 2.34.

2.4.3. *Degré d'une application.* $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$.

IL N'Y AURA PAS DE NOTES DE COURS SUR CETTE PARTIE. JE VOUS INVITE À ÉTUDIER LES RÉFÉRENCES INDIQUÉES.

Définition du degré d'une application lisse $f : M^n \rightarrow N^n$, avec M, N variétés compactes orientées. Référence : [Milnor 1965, Chapitre 5] ou [Hirsch, §5.1].

Théorème de Hopf : le degré réalise un isomorphisme $\pi_n(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.
Référence : [Hirsch, §5.1].

3. RAPPELS D'HOMOLOGIE ET DE COHOMOLOGIE

IL N'Y AURA PAS DE NOTES DE COURS SUR CETTE PARTIE. JE VOUS INVITE À ÉTUDIER LES RÉFÉRENCES INDIQUÉES.

3.1. Homologie et cohomologie singulière.

[Hatcher 2.1, 2.3, 2.A, 3.1-3.2], [Bredon Ch. IV, V.5-V.7, VI.1-VI.4]

3.2. Homologie et cohomologie cellulaire.

[Hatcher 2.2], [Bredon IV.7-IV.10]

3.3. Homologie à coefficients dans un système local.

[Hatcher 3.H], [McCleary 5.3], [Steenrod 30, 31]

4. CLASSES CARACTÉRISTIQUES

Les classes caractéristiques d'un fibré vectoriel mesurent son défaut de trivialité. Ce sont des classes de cohomologie sur la base. Nous expliquons dans ce chapitre deux approches de cette théorie, l'une axiomatique, particulièrement utile pour effectuer des calculs, l'autre géométrique, via la théorie de l'obstruction.

4.1. Le point de vue axiomatique. Ce point de vue a déjà été préfiguré dans la Remarque 2.31 : en vue de la bijection naturelle

$$[B, G_k^{\mathbb{K}}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(B),$$

$$[f] \longmapsto f^* \gamma_k^{\mathbb{K}},$$

toute classe de cohomologie $\alpha \in H^*(G_k^{\mathbb{K}})$ détermine pour tout fibré $\xi \simeq f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}$ de rang k sur une base B une classe de cohomologie $\alpha(\xi) = f^* \alpha \in H^*(B)$. L'application $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$ telle que $\xi \simeq f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}$ est dite *application classifiante*. Elle est uniquement déterminée à homotopie près. La question du calcul de la cohomologie des Grassmanniennes devient par conséquent centrale.

Pour décrire la structure de la cohomologie des Grassmanniennes introduisons l'application

$$\mathbb{K}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{K}P^\infty = G_1^{\mathbb{K}} \times \cdots \times G_1^{\mathbb{K}} \xrightarrow{f} G_k^{\mathbb{K}},$$

dont la source est un produit de k copies de $\mathbb{K}P^\infty$, définie comme suit. Pour tout $s \geq 1$ l'on a un plongement

$$(\mathbb{K}^s)^{\times k} \rightarrow \mathbb{K}^{ks},$$

$$((x_1^1, \dots, x_1^k), \dots, (x_k^1, \dots, x_k^k)) \mapsto (x_1^1, \dots, x_k^1, x_1^2, \dots, x_k^2, \dots, x_1^k, \dots, x_k^k).$$

Celui-ci induit un plongement

$$(\mathbb{K}P^{s-1})^{\times k} \rightarrow G_{ks,k}^{\mathbb{K}}, \quad (d_1, \dots, d_k) \mapsto d_1 \oplus \cdots \oplus d_k$$

qui est compatible avec les inclusions $\mathbb{K}P^{s'} \hookrightarrow \mathbb{K}P^{s''}$ et $G_{s',k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow G_{s'',k}^{\mathbb{K}}$, $s' \leq s''$ et induit à la limite le plongement

$$f : (\mathbb{K}P^\infty)^{\times k} \hookrightarrow G_k^{\mathbb{K}}.$$

Il est clair que

$$f^* \gamma_k^{\mathbb{K}} = p_1^* \gamma_1^{\mathbb{K}} \oplus \cdots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{K}}.$$

Rappelons, en vue de l'énoncé qui suit, que l'on a des isomorphismes d'anneaux gradués

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x], \quad |x| = 1$$

et

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[y], \quad |y| = 2.$$

Remarque 4.1. Dans ce dernier isomorphisme le générateur y est bien déterminé au signe près. En vue du fait que $\pi_1(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ l'on a aussi $H_1(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ et par conséquent $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$. Dans $H_2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ nous avons un générateur canonique donné par la classe fondamentale $[\mathbb{C}P^1]$ d'une droite projective $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^\infty$ munie de son orientation complexe.

Convention. L'on note y le générateur négatif de $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$, déterminé par la relation

$$\langle y, [\mathbb{C}P^1] \rangle = -1.$$

Cette convention est issue du fait que nous souhaitons que y représente la première classe de Chern du fibré tautologique $\gamma_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ (cf. plus bas). Or la restriction de ce dernier à $\mathbb{C}P^1$ coïncide avec $\mathcal{O}(-1)$. Nous verrons plus bas que cette convention assure que la première classe de Chern $c_1(\mathcal{O}(k))$ du fibré holomorphe en droites $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ vérifie

$$\langle c_1(\mathcal{O}(k)), [\mathbb{C}P^1] \rangle = k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notons $x_i = p_i^*x \in H^1((\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}/2)$ et $y_i = p_i^*y \in H^2((\mathbb{C}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z})$. L'on a alors des isomorphismes d'anneaux gradués

$$H^*((\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}/2) \simeq (H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2))^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k]$$

et

$$H^*((\mathbb{C}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}) \simeq (H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}))^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k].$$

Théorème 4.2 (cohomologie des Grassmanniennes).

(i) La cohomologie à coefficients $\mathbb{Z}/2$ de la grassmannienne réelle $G_k^{\mathbb{R}}$ est isomorphe en tant qu'anneau gradué à un anneau de polynômes en k variables de degrés $1, 2, \dots, k$.

L'application $f : (\mathbb{R}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$ induit en cohomologie à coefficients $\mathbb{Z}/2$ une injection

$$f^* : H^*(G_k^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2) \hookrightarrow H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k], \quad |x_i| = 1.$$

L'image de f^* est l'anneau des polynômes symétriques $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k]^{\mathfrak{S}_k}$ en les variables x_1, \dots, x_k .

(ii) La cohomologie à coefficients entiers de la grassmannienne complexe $G_k^{\mathbb{C}}$ est isomorphe en tant qu'anneau gradué à un anneau de polynômes en k variables de degrés $2, 4, \dots, 2k$.

L'application $f : (\mathbb{C}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{C}}$ induit en cohomologie à coefficients entiers une injection

$$f^* : H^*(G_k^{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k], \quad |y_i| = 2.$$

L'image de f^* est l'anneau des polynômes symétriques $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k]^{\mathfrak{S}_k}$ en les variables y_1, \dots, y_k . \square

Nous allons donner plus loin une démonstration de ce théorème basée sur le théorème de Leray-Hirsch appliqué à des fibrations appropriées impliquant les variétés de drapeaux.

Un point clé des énoncés ci-dessus est que l'application f^* fournit un système privilégié de générateurs pour la cohomologie des grassmanniennes réelle et complexe, à savoir les préimages des polynômes symétriques élémentaires. Il est bien connu que ces derniers constituent un système libre de générateurs pour l'algèbre des polynômes symétriques. Leurs préimages par f^* sont appelées *classes de Stiefel-Whitney universelles, notées w_1, \dots, w_k* (dans le cas réel), respectivement *classes de Chern universelles, notées c_1, \dots, c_k* (dans le cas complexe). Il est important à ce stade de réaliser qu'une algèbre de polynômes n'a pas de générateurs canoniquement définis. L'application f^* permet justement de mettre en évidence un système privilégié de générateurs pour la cohomologie des Grassmanniennes.

Ainsi

$$H^*(G_k^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[w_1, \dots, w_k], \quad |w_i| = i,$$

avec

$$f^*w_i = \sum \prod_{k_p \neq k_q} x_{k_1} \dots x_{k_i},$$

ou de manière plus explicite

$$f^*w_1 = x_1 + \dots + x_k,$$

$$f^*w_2 = \sum_{p \neq q} x_p x_q,$$

$$\vdots$$

$$f^*w_k = x_1 \dots x_k.$$

Aussi

$$H^*(G_k^{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k], \quad |c_i| = 2i,$$

avec

$$f^*c_i = \sum \prod_{k_p \neq k_q} y_{k_1} \dots y_{k_i},$$

ou de manière plus explicite

$$f^*c_1 = y_1 + \dots + y_k,$$

$$f^*c_2 = \sum_{p \neq q} y_p y_q,$$

$$\vdots$$

$$f^*c_k = y_1 \dots y_k.$$

Remarque 4.3. L'application $f : (\mathbb{K}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$ est appelée aussi application de scindement (à coefficients $\mathbb{Z}/2$ dans le cas réel, respectivement à coefficients entiers dans le cas complexe). De manière générale, étant donné un fibré $\xi \rightarrow B$, on appelle application de scindement à coefficients dans A une application $f : B' \rightarrow B$ telle que $f^*\xi$ est isomorphe à une somme directe de fibrés en droites et telle que l'application $f^* : H^*(B; A) \rightarrow H^*(B'; A)$ induite en cohomologie à coefficients dans A est injective.

Tout fibré réel (au-dessus d'une base paracompacte) admet une application de scindement à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$, et tout fibré complexe admet une application de scindement à coefficients entiers. La construction est la suivante : étant donné $\xi \rightarrow B$ de rang k , l'on considère la fibration localement triviale $\mathbb{P}(\xi) \xrightarrow{p} B$ dont la fibre au-dessus d'un point $b \in B$ est l'espace projectif $\mathbb{P}(\xi_b)$. Alors $p^*\xi \simeq \eta \oplus \gamma$, avec η de rang $k-1$ et γ le fibré tautologique sur $\mathbb{P}(\xi)$, dont la restriction à chaque fibre $\mathbb{P}(\xi)_b = \mathbb{P}(\xi_b)$ est le fibré tautologique sur le projectif.

$$\begin{array}{ccc} p^*\xi \simeq \eta \oplus \gamma & \longrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(\xi) & \xrightarrow{p} & B. \end{array}$$

L'on démontrera plus bas comme conséquence du théorème de Leray-Hirsch que l'application $f^* : H^*(B; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(\mathbb{P}(\xi); \mathbb{Z}/2)$ est injective dans le cas réel, respectivement que $f^* : H^*(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathbb{P}(\xi); \mathbb{Z})$ est injective dans le cas complexe. En itérant la construction pour η etc. l'on construit en k étapes une application de scindement pour ξ .

Définition 4.4. Soit $\xi \rightarrow B$ un fibré de rang k sur \mathbb{R} . Soit $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$ une application classifiante. La i -ème classe de Stiefel-Whitney de ξ , notée $w_i(\xi)$, est définie comme

$$w_i(\xi) = f^*w_i \in H^i(B; \mathbb{Z}/2), \quad i = 1, \dots, k,$$

avec w_i la i -ème classe de Stiefel-Whitney universelle.

L'on pose par définition $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}/2)$ et $w_i(\xi) = 0 \in H^i(B; \mathbb{Z}/2)$ pour $i > k$.

La classe de Stiefel-Whitney totale $w(\xi) \in \prod_{i \geq 0} H^i(B; \mathbb{Z}/2)$ est définie comme

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots + w_k(\xi).$$

L'on voit en particulier que, par définition, l'on a

$$w_i(\gamma_k^{\mathbb{R}}) = w_i \in H^i(G_k^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2), \quad i = 1, \dots, k.$$

Ainsi la cohomologie de la grassmannienne $G_k^{\mathbb{R}}$ à coefficients $\mathbb{Z}/2$ est engendrée par les classes de Stiefel-Whitney du fibré universel $\gamma_k^{\mathbb{R}}$.

Définition 4.5. Soit $\xi \rightarrow B$ un fibré de rang k sur \mathbb{C} . Soit $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{C}}$ une application classifiante. La i -ème classe de Chern de ξ , notée $c_i(\xi)$, est définie comme

$$c_i(\xi) = f^*c_i \in H^{2i}(B; \mathbb{Z}), \quad i = 1, \dots, k,$$

avec c_i la i -ème classe de Chern universelle.

L'on pose par définition $c_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z})$ et $c_i(\xi) = 0 \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ pour $i > k$.

La classe de Chern totale $c(\xi) \in \prod_{i \geq 0} H^i(B; \mathbb{Z})$ est définie comme

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots + c_k(\xi).$$

L'on voit en particulier que, par définition, l'on a

$$c_i(\gamma_k^{\mathbb{C}}) = c_i \in H^{2i}(G_k^{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}), \quad i = 1, \dots, k.$$

Ainsi la cohomologie de la grassmannienne $G_k^{\mathbb{C}}$ à coefficients entiers est engendrée par les classes de Chern du fibré universel $\gamma_k^{\mathbb{C}}$.

Théorème 4.6. Les classes de Stiefel-Whitney des fibrés réels $\xi \rightarrow B$ vérifient les propriétés suivantes, qui les déterminent de manière unique.

(1) (DEGRÉ) $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}/2)$ pour tout $i \geq 0$. De plus, $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}/2)$ et $w_i(\xi) = 0$ pour $i > \text{rang}(\xi)$.

(2) (FONCTORIALITÉ) pour toute application $f : B' \rightarrow B$ l'on a

$$w_i(f^*\xi) = f^*w_i(\xi), \quad i \geq 0.$$

(3) (SOMME DE WHITNEY)

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta).$$

(4) (NORMALISATION) pour le fibré tautologique $\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}P^1$, la première classe de Stiefel-Whitney $w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}})$ est le générateur de $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$.

□

Remarque. L'axiome de normalisation est parfois écrit dans la littérature sous la forme suivante : pour le fibré tautologique $\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ l'on a $w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}) \neq 0 \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2)$. Ces deux formulations sont bien-sûr équivalentes puisque $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$.

Théorème 4.7. Les classes de Chern des fibrés complexes $\xi \rightarrow B$ vérifient les propriétés suivantes, qui les déterminent de manière unique.

(1) (DEGRÉ) $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ pour tout $i \geq 0$. De plus, $c_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z})$ et $c_i(\xi) = 0$ pour $i > \text{rang}(\xi)$.

(2) (FONCTORIALITÉ) pour toute application $f : B' \rightarrow B$ l'on a

$$c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi), \quad i \geq 0.$$

(3) (SOMME DE WHITNEY)

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta).$$

(4) (NORMALISATION) pour le fibré tautologique $\gamma_{2,1}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^1$, la première classe de Chern $c_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{C}})$ est le générateur négatif de $H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, au sens où

$$\langle c_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{C}}), [\mathbb{C}P^1] \rangle = -1.$$

□

Ces deux théorèmes ont des démonstrations en tout point similaires, nous donnons donc les détails uniquement pour le premier d'entre eux concernant les classes de Stiefel-Whitney.

Démonstration du théorème 4.6. Démontrons d'abord l'unicité. Par la propriété de (FONCTORIALITÉ), il suffit de montrer que les classes de Stiefel-Whitney des fibrés tautologiques $\gamma_k^{\mathbb{R}} \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$, $k \geq 1$ sont uniquement déterminées par les axiomes.

Nous utilisons l'application de scindement $f : (\mathbb{R}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$, qui vérifie $f^*\gamma_k^{\mathbb{R}} \simeq p_1^*\gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^*\gamma_1^{\mathbb{R}}$ et dont l'application induite en cohomologie est injective. Puisque $w_i(p_1^*\gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^*\gamma_1^{\mathbb{R}}) = f^*w_i(\gamma_k^{\mathbb{R}})$, il suffit de montrer que les classes de Stiefel-Whitney du fibré $p_1^*\gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^*\gamma_1^{\mathbb{R}} \rightarrow (\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}$ sont uniquement déterminées par les axiomes.

Remarquons le fait que les axiomes de (NORMALISATION) et (FONCTORIALITÉ) impliquent

$$w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = x,$$

où $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]$, $|x| = 1$. En effet, l'inclusion $incl : \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^\infty$ est telle que $incl^*\gamma_1^{\mathbb{R}} = \gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}$. En appliquant les axiomes de (FONCTORIALITÉ) et (NORMALISATION) l'on voit que $incl^*w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}})$ est non-nulle dans $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2)$, de sorte que nécessairement $w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}})$ est non-nulle dans $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$. Puisque ce dernier groupe est de rang 1, il s'ensuit que $w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = x$.

Par les axiomes de (SOMME DE WHITNEY) et de (FONCTORIALITÉ) l'on a

$$\begin{aligned} w(p_1^*\gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^*\gamma_1^{\mathbb{R}}) &= w(p_1^*\gamma_1^{\mathbb{R}}) \dots w(p_k^*\gamma_1^{\mathbb{R}}) \\ &= p_1^*w(\gamma_1^{\mathbb{R}}) \dots p_k^*w(\gamma_1^{\mathbb{R}}) \\ &= p_1^*(1+x) \dots p_k^*(1+x) \\ &= (1+x_1) \dots (1+x_k) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^k \sigma_i(x_1, \dots, x_k), \end{aligned}$$

avec $\sigma_i \in \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k]^{\mathbb{S}_k}$ le i -ème polynôme symétrique élémentaire en les variables x_1, \dots, x_k . Puisque $\sigma_i(x_1, \dots, x_k)$ est la composante de degré i dans $\prod_{j=1}^n (1 + x_j)$, on en déduit que l'on a nécessairement

$$w_i(p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) = \sigma_i(x_1, \dots, x_k).$$

Les classes de Stiefel-Whitney du fibré $p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}$ sont donc uniquement déterminées, et il en est de même pour celles de $\gamma_k^{\mathbb{R}}$. L'unicité est démontrée.

Démontrons que notre définition 4.5 fournit des classes de cohomologie qui satisfont les propriétés précédentes. La propriété (DEGRÉ) est claire par définition, et la propriété de (FONCTORIALITÉ) découle directement du fait que nous avons défini ces classes par tiré en arrière de classes sur les grassmanniennes via des applications classifiantes (cf. la discussion préliminaire dans ce chapitre et la Remarque 2.31).

L'axiome de (NORMALISATION) est vérifié comme suit. Par définition nous avons $w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = x$, où $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]$, $|x| = 1$. Considérons l'inclusion $incl : \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$, qui vérifie $incl^* \gamma_1^{\mathbb{R}} = \gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}$. Le point clé est que $incl^* : H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme en tout degré $0 \leq * \leq 1$. Ainsi $w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}) = incl^* w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = incl^* x$ est l'unique générateur de $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$.

L'axiome de (SOMME DE WHITNEY) est vérifié comme suit. Soit ξ, η deux fibrés de rang respectifs m et n sur une base B , avec des applications classifiantes $f : B \rightarrow G_m^{\mathbb{R}}$, $\xi \simeq f^* \gamma_m^{\mathbb{R}}$ et $g : B \rightarrow G_n^{\mathbb{R}}$, $\eta \simeq g^* \gamma_n^{\mathbb{R}}$. Pour plus de fluidité dans les notations nous écrivons dans ce qui suit γ_m au lieu de $\gamma_m^{\mathbb{R}}$, G_m au lieu de $G_m^{\mathbb{R}}$ etc. Considérons le diagramme suivant, dans lequel $diag : B \rightarrow B \times B$ désigne le plongement diagonal.

$$\begin{array}{ccccc} \xi \oplus \eta & \longrightarrow & p_1^* \xi \oplus p_2^* \eta & \longrightarrow & p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad diag \quad} & B \times B & \xrightarrow{\quad (f,g) \quad} & G_m \times G_n \end{array}$$

Celui-ci est un diagramme de tirés en arrière de fibrés. En effet

$$(f, g)^*(p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n) = p_1^* \xi \oplus p_2^* \eta$$

puisque $p_1 \circ (f, g) = f \circ p_1$ et $p_2 \circ (f, g) = g \circ p_2$, et aussi

$$diag^*(p_1^* \xi \oplus p_2^* \eta) \simeq \xi \oplus \eta$$

par définition de la somme directe de deux fibrés. Par functorialité de la classe de Stiefel-Whitney totale et du produit en cohomologie, il suffit donc de démontrer l'identité

$$(4.1) \quad w(p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n) = w(p_1^* \gamma_m) w(p_2^* \gamma_n).$$

Nous utilisons maintenant les applications de scindement

$$f_m : G_1^{\times m} \rightarrow G_m, \quad f_n : G_1^{\times n} \rightarrow G_n$$

et le diagramme de fibrés

$$\begin{array}{ccc} p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n & \longleftarrow & p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_m^* \gamma_1 \oplus (p'_1)^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus (p'_n)^* \gamma_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_m \times G_n & \xleftarrow{(f_m, f_n)} & G_1^{\times m} \times G_1^{\times n} \end{array}$$

Puisque f_m^* et f_n^* sont injectives en cohomologie, il en est de même pour $(f_m, f_n)^*$. Pour démontrer l'égalité (4.1) il suffit donc de montrer par functorialité

$$\begin{aligned} w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_m^* \gamma_1 \oplus (p'_1)^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus (p'_n)^* \gamma_1) \\ = w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_m^* \gamma_1) w((p'_1)^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus (p'_n)^* \gamma_1). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découle directement de l'associativité du produit en cohomologie en vertu de l'égalité générale

$$w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_k^* \gamma_1 \rightarrow G_1^{\times k}) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n).$$

En effet, par définition l'on a

$$\begin{aligned} w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_k^* \gamma_1) &= w(f_k^* \gamma_k) \\ &= f_k^* w(\gamma_k) \\ &= f_k^*(1 + w_1 + \cdots + w_k) \\ &= 1 + \sigma_1(x_1, \dots, x_k) + \cdots + \sigma_k(x_1, \dots, x_k) \\ &= (1 + x_1) \cdots (1 + x_k). \end{aligned}$$

□

Voici quelques conséquences immédiates des axiomes.

- Si $\xi \simeq \eta$ alors $w(\xi) = w(\eta)$.
En effet, ξ et η ont des applications classifiantes homotopes.
- Soit ϵ_k un fibré trivial de rang k . Alors $w_i(\epsilon_k) = 0$ pour tout $i \geq 1$.
En effet, ϵ_k est le tiré en arrière du fibré trivial sur un point.
- Supposons que le fibré ξ de rang k admet ℓ sections linéairement indépendantes en chaque point. Alors

$$w_{k-\ell+1}(\xi) = 0, \dots, w_k(\xi) = 0.$$

En effet, dans cette situation ξ s'écrit $\xi \simeq \eta \oplus \epsilon_\ell$ et le résultat découle du point précédent et de l'axiome de (SOMME DE WHITNEY).

Exemple. Puisque $\nu_{\mathbb{R}^{n+1}} S^n \simeq \epsilon_1$ l'on déduit que $TS^n \oplus \epsilon_1 \simeq \epsilon_{n+1}$, de sorte que

$$w(TS^n) = 1.$$

Exemple. Notons $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1})$. Alors

$$w(\gamma_{n+1,1} \rightarrow \mathbb{R}P^n) = 1 + x.$$

Exemple. Nous avons $T\mathbb{R}P^n \simeq \text{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^\perp)$, où l'on note $\gamma_1 = \gamma_{n+1,1}^{\mathbb{R}}$. Ici γ_1^\perp désigne le fibré de rang n sur $\mathbb{R}P^n$ dont la fibre au-dessus d'une droite $d \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est l'hyperplan orthogonal à d . En utilisant le fait que $\gamma_1 \oplus \gamma_1^\perp \simeq \epsilon_{n+1}$ et $\text{Hom}(\gamma_1, \gamma_1) \simeq \epsilon_1$, et aussi $\gamma_1 \simeq \gamma_1^*$ en tant que fibrés réels, nous obtenons

$$\begin{aligned} w(T\mathbb{R}P^n) &= w(T\mathbb{R}P^n \oplus \epsilon_1) \\ &= w(\text{Hom}(\gamma_1, \epsilon_{n+1})) \\ &= w((\gamma_1^*)^{\oplus(n+1)}) \\ &= w(\gamma_1)^{n+1} \\ &= (1+x)^{n+1}, \end{aligned}$$

où $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1})$. Ainsi

$$w_i(T\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{i} x^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Exercice. Montrer que, si $\mathbb{R}P^n$ est parallélisable, c'est-à-dire $T\mathbb{R}P^n$ est trivial, alors nécessairement n est de la forme

$$n = 2^k - 1, \quad k \geq 0.$$

Remarque. Des arguments plus sophistiqués, toujours de nature topologique, restreignent davantage la situation : l'on a nécessairement $n = 0, 1, 3, 7$.

Voici une application spectaculaire, due à Stiefel. (cf. [Milnor, Théorème 4.7, p. 48]).

Théorème 4.8. *Supposons qu'il existe une application bilinéaire*

$$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sans diviseurs de zéro. Alors $\mathbb{R}P^{n-1}$ est parallélisable et par conséquent n est nécessairement de la forme

$$n = 2^k, \quad k \geq 0.$$

□

Tenant compte de la remarque précédente, seulement les cas $n = 1, 2, 4, 8$ sont possibles. Ceux-ci sont effectivement réalisables via les structures multiplicatives sur $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

4.2. Le point de vue de la théorie de l'obstruction. L'idée de la théorie de l'obstruction est la suivante : étant donnés des espaces X , Y , un sous-espace $A \subseteq X$ et une application continue $\bar{g} : A \rightarrow Y$, l'on souhaite l'étendre à une application définie sur X .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{g}} & Y \\ \downarrow & \nearrow g & \\ X & & \end{array}$$

Lorsque X est obtenu à partir de A par attachement successif de cellules (on dit que (X, A) est un CW-complexe relatif, cf. Annexe B), l'on essaie de construire cette extension de façon inductive sur les squelettes de X . Pour passer du squelette X_n au squelette X_{n+1} l'on rencontre une obstruction représentée par une classe de cohomologie qui vit dans $H^{n+1}(X, A; \pi_n Y)$. L'annulation de cette classe est équivalente au fait que l'extension donnée sur X_n peut être modifiée rel X_{n-1} pour ensuite être étendue à X_{n+1} .

Ce procédé peut être appliqué dans des situations variées : étant données deux applications $g_0, g_1 : X \rightarrow Y$ et une homotopie $g_0|_A \simeq g_1|_A$, l'on souhaite étendre celle-ci à une homotopie globale sur X

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{\bar{g}} & Y \\ \downarrow & \nearrow g & \\ X \times I & & \end{array}$$

Ou encore, étant donnée une fibration $E \xrightarrow{p} X$ et une section \bar{s} définie le long de A , l'on souhaite étendre celle-ci en une section globale sur X

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{s}} & E \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

Ce dernier problème est le plus général.

4.2.1. Deux constructions explicites. Nous discutons dans cette section deux exemples significatifs.

Théorème 4.9. *Soit X un CW-complexe. L'on a une bijection*

$$[X, S^1] \simeq H^1(X; \mathbb{Z}).$$

Remarque 4.10. *La bijection que nous allons construire sera fonctorielle en X et dépendra uniquement du choix d'un générateur de $H^1(S^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, ou encore, de manière équivalente, du choix d'une orientation sur S^1 .*

L'ensemble $[X, S^1]$ possède une structure de groupe induite par la structure de groupe de S^1 . La bijection que nous allons construire sera en fait un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Le choix d'une orientation de S^1 détermine un générateur privilégié $\bar{\alpha} \in H^1(S^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. L'on définit

$$T : [X, S^1] \rightarrow H^1(X; \mathbb{Z}), \quad T([g]) = g^* \bar{\alpha}.$$

Fixons un point base $p \in S^1$. Soit X_n le n -squelette de X .

T EST SURJECTIVE. Soit $\alpha \in H^1(X; \mathbb{Z})$, que l'on représente par un cocycle cellulaire $\theta \in C^1(X; \mathbb{Z}) = H^1(X_1, X_0; \mathbb{Z})$. Nous souhaitons construire une fonction $g : X \rightarrow S^1$ telle que $g^* \bar{\alpha} = \alpha$.

Définissons g sur le 0-squelette en envoyant toutes les 0-cellules sur le point base $p \in S^1$.

Définissons g sur le 1-squelette de la manière suivante : sur une cellule e_i^1 déterminée par son application caractéristique $\phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (X_1, x_0)$ l'on définit g de manière à ce que l'application composée $g \circ \phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (S^1, p)$ soit de degré $\theta(e_i^1) \in \mathbb{Z}$. Si l'on considère sur S^1 la structure cellulaire donnée par une unique cellule de dimension 0 égale à p et une cellule de dimension 1 donnée par une application $(I, \partial I) \rightarrow (S^1, p)$ compatible avec l'orientation, le cocycle $\bar{\theta} \in C^1(S^1; \mathbb{Z})$ qui prend la valeur 1 sur cette unique cellule de dimension 1 représente la classe $\bar{\alpha}$ et l'on a

$$g^* \bar{\theta} = \theta.$$

Nous souhaitons étendre g au 2-squelette. Soit e_α^2 une 2-cellule avec application caractéristique $\phi_\alpha : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (X_2, X_1)$. Puisque θ est un cocycle nous avons

$$0 = \delta\theta(e_\alpha^2) = \theta(\partial e_\alpha^2) = \sum_i [e_\alpha^2 : e_i^1] \theta(e_i^1).$$

Cette dernière expression est égale à

$$\deg(g \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1).$$

En effet, soit $p_i : X_1 \rightarrow e_i^1/\partial e_i^1$ l'application qui contracte le complémentaire de l'intérieur de e_i^1 sur un point. Alors $[e_\alpha^2 : e_i^1] = \deg(p_i \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow e_i^1/\partial e_i^1)$, et $\theta(e_i^1) = \deg(g \circ \phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (S^1, p)) = \deg(g : e_i^1/\partial e_i^1 \rightarrow (S^1, p))$, de sorte que $[e_\alpha^2 : e_i^1] \theta(e_i^1) = \deg(g \circ p_i \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1)$. L'application $g : X_1 \rightarrow S^1$ factorise par X_1/X_0 , qui est un bouquet de cercles, et l'on a $\deg(g \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1) = \sum_i \deg(g \circ p_i \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1)$, avec p_i la contraction du bouquet de cercles sur le i -ème cercle du bouquet.

Puisque le degré de $g \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1$ est nul, elle admet une extension à D^2 . Ceci détermine une extension de g à X_2 .

Supposons avoir étendu g à X_n , $n \geq 2$. L'obstruction pour étendre g à une cellule e_β^{n+1} est représentée par la classe d'homotopie libre $[g \circ \phi_\beta|_{\partial D^{n+1}} : \partial D^{n+1} \rightarrow S^1] \in [S^n, S^1] = \pi_n(S^1) = 0$, $n \geq 2$. Toutes ces obstructions sont donc nulles et nous pouvons étendre g au squelette X_{n+1} .

La relation $g^*\bar{\theta} = \theta$ montre que $g^*\bar{\alpha} = \alpha$.

T EST INJECTIVE. Soient $g_0, g_1 : X \rightarrow S^1$ telles que $g^*\bar{\alpha} = g^*\bar{\alpha}$. Nous souhaitons montrer que g_0 et g_1 sont homotopes et nous allons procéder par récurrence sur la dimension des squelettes de X .

Les applications g_0 et g_1 sont homotopes sur X_0 puisque S^1 est connexe par arcs. Nous avons même mieux : toute application $g : X \rightarrow S^1$ est homotope à une application qui envoie X_0 sur le point $p \in S^1$. Ceci découle de la connexité par arcs de S^1 , qui assure qu'une telle homotopie existe sur X_0 , et de la propriété d'extension des homotopies pour la paire (X, X_0) , qui assure que l'homotopie sur X_0 s'étend à une homotopie globale sur X (cf. la discussion autour de la Proposition 2.38). Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que $g_0|_{X_0} = g_1|_{X_0} \equiv p$.

Montrons maintenant que g_0 et g_1 sont homotopes sur X_1 . Notons

$$\theta_k = g_k^*\bar{\theta} \in C^1(X; \mathbb{Z}), \quad k = 1, 2.$$

Ainsi $\theta_k(e_i^1) = \deg(g_k \circ \phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (S^1, p))$. L'hypothèse affirme l'existence d'une cochaîne

$$d \in C^0(X; \mathbb{Z}) = H^0(X_0; \mathbb{Z}) \simeq \prod_j \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle e_j^0 \rangle, \mathbb{Z})$$

telle que $\theta_1 - \theta_0 = \delta d$, ou encore

$$\theta_1(e_i^1) = \theta_0(e_i^1) + d(\phi_i(1)) - d(\phi_i(0)).$$

Puisque deux applications $S^1 \rightarrow S^1$ sont homotopes si et seulement si elles ont le même degré, l'on déduit que g_0 et g_1 sont homotopes sur X_1 relativement à X_0 , c'est-à-dire en gardant leurs valeurs sur X_0 fixes, si et seulement si $\theta_0 = \theta_1$. Or la cochaîne d n'est pas nécessairement nulle et donc, pour trouver une homotopie de g_0 vers g_1 sur X_1 , nous devons nous laisser la liberté d'altérer les valeurs de g_0 sur X_0 . Le rôle de la cochaîne $d \in C^0(X; \mathbb{Z})$ sera de prescrire une telle homotopie le long du 0-squelette.

Considérons pour chaque cellule e_j^0 une homotopie

$$h : \{e_j^0\} \times I \rightarrow S^1$$

telle que $h(e_j^0 \times \partial I) = \{p\}$ et

$$\deg(h) = d(e_j^0).$$

Nous interprétons cette homotopie comme une homotopie de g_0 sur X_0 . La propriété d'extension des homotopies pour la paire (X, X_0) assure que cette homotopie s'étend en une homotopie sur X , que l'on note aussi h . Soit $g'_0 = h(\cdot, 1)$ et notons $\theta'_0 = g'_0 \circ \bar{h}$. Pour toute 1-cellule e_i^1 , en posant $\bar{h}(t) = h(1-t)$, l'on obtient

$$\begin{aligned} \theta'_0(e_i^1) &= \deg(g'_0 \circ \phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (S^1, p)) \\ &= \deg(\bar{h}(\phi_i(0)) \cup g_0 \cup h(\phi_i(1)) : \{\phi_i(0)\} \times I \cup I \cup \{\phi_i(1)\} \times I \rightarrow S^1) \\ &= -d(\phi_i(0)) + \theta_0(e_i^1) + d(\phi_i(1)) \\ &= \theta_1(e_i^1). \end{aligned}$$

Ainsi g'_0 et g_1 sont homotopes sur X_1 rel X_0 , et g_0 et g_1 sont homotopes sur X_1 .

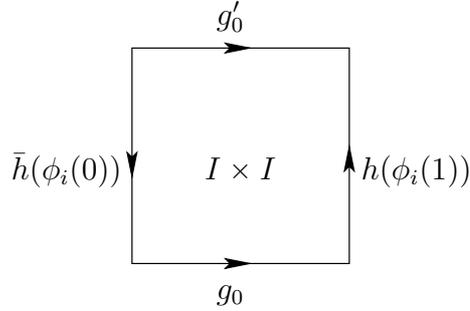


FIGURE 8. La relation $\theta'_0(e_i^1) = \theta_0(e_i^1) + d(\phi_i(1)) - d(\phi_i(0))$ découle du fait que le degré d'une application $\partial(I \times I) \rightarrow S^1$ qui s'étend à $I \times I$ est nul.

Supposons que l'on ait construit une homotopie h_n entre g_0 et g_1 sur le squelette X_n , $n \geq 1$. L'obstruction à étendre cette homotopie à une cellule e_β^{n+1} est représentée par la classe d'homotopie libre de l'application $(g_0 \cup h_n \cup g_1) \circ \phi_\beta \times \text{Id} : \partial(D^{n+1} \times I) = D^{n+1} \times \{0\} \cup \partial D^{n+1} \times I \cup D^{n+1} \times \{1\} \rightarrow S^1 \in [S^{n+1}, S^1] = \pi_{n+1}(S^1) = 0$, $n \geq 1$. Nous pouvons donc étendre l'homotopie h_n au squelette X_{n+1} et les applications g_0 et g_1 sont homotopes sur X_{n+1} .

Ceci achève la preuve par récurrence. \square

Remarque 4.11 (Espaces de Eilenberg-MacLane). *Le théorème précédent peut être lu comme donnant une interprétation homotopique du premier groupe de cohomologie à coefficients entiers $H^1(X; \mathbb{Z})$. Les propriétés homotopiques du cercle que nous avons utilisées étaient les suivantes : S^1 est connexe par arcs, $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_i(S^1) = 0$, $i \geq 2$.*

Définition 4.12. *Soit G un groupe abélien et $n \geq 1$ un entier. Un CW-complexe connexe par arcs K est un espace de Eilenberg-MacLane de type (G, n) s'il vérifie*

$$\pi_n(K) \simeq G, \quad \pi_i(K) = 0, \quad i \neq n.$$

On dit aussi que K est un $K(G, n)$.

Par exemple, S^1 est un $K(\mathbb{Z}, 1)$, $\mathbb{C}P^\infty$ est un $K(\mathbb{Z}, 2)$, $\mathbb{R}P^\infty$ est un $K(\mathbb{Z}/2, 1)$.

Pour tout choix de groupe abélien G et pour tout choix d'entier $n \geq 1$ il existe un $K(G, n)$. Celui-ci est obtenu en présentant G par générateurs et relations. L'on part avec un squelette de dimension 0 réduit à un point, les squelettes X_i , $1 \leq i < n$ coïncident avec X_0 , le squelette X_n est obtenu en rajoutant une cellule pour chaque générateur de G , le squelette X_{n+1} est obtenu en rajoutant une cellule pour chaque relation avec application d'attachement donnée par la relation, le squelette X_{n+2} est obtenu en rajoutant des $n+2$ -cellules pour "tuer" le π_{n+1} qui a été créé lors de la construction de X_{n+1} , et plus généralement le squelette X_{n+p+1} , $p \geq 1$ est obtenu en rajoutant des $n+p+1$ -cellules pour "tuer" le π_{n+p} qui a été créé lors de la construction de X_{n+p} .

Une démonstration similaire à celle du théorème 4.9 permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 4.13. Soit G un groupe abélien, $n \geq 1$ un entier et K un $K(G, n)$. Le choix d'un isomorphisme entre $\pi_n(K)$ et G détermine une bijection fonctorielle

$$[X, K] \xrightarrow{\cong} H^n(X; G).$$

□

Le point clé ici est le théorème de Hurewicz (cf. Annexe) qui affirme que pour un espace K qui est un $K(G, n)$ l'on a un isomorphisme $\pi_n(K) \xrightarrow{\cong} H_n(K; \mathbb{Z})$, $[f] \mapsto f_*[S^n]$. Ainsi

$H^n(K; G) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(K; \mathbb{Z}), G) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_n(K), G) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, G)$ possède une classe canonique $\bar{\alpha}$ qui correspond sous les isomorphismes précédents à Id_G . La correspondance du théorème est alors donnée par

$$[X, K] \longrightarrow H^n(X; G), \quad f \mapsto f^*\bar{\alpha}.$$

Comme conséquence de la fonctorialité de la correspondance donnée par le théorème l'on déduit qu'un $K(G, n)$ est unique à homotopie près.

Notre deuxième exemple concerne les fibrations.

Théorème 4.14. Soit $L \xrightarrow{p} B$ un fibré vectoriel orienté de rang 2 sur \mathbb{R} dont la base est un CW-complexe.

(i) Le fibré L admet une section partout non-nulle au-dessus du squelette B_1 . Deux telles sections sont homotopes au-dessus de B_0 dans l'espace des sections qui ne s'annulent pas.

(ii) Il existe une classe de cohomologie $e(L) \in H^2(B; \mathbb{Z})$, appelée classe d'Euler, fonctorielle par rapport aux morphismes de fibrés, qui

s'annule si et seulement si le fibré admet une section partout non-nulle au-dessus du squelette B_2 . Toute section partout non-nulle au-dessus du squelette B_2 admet une extension en une section partout non-nulle sur B .

(iii) Les classes d'homotopie de sections partout non-nulles sur B_1 forment un espace affine sur $H^1(B; \mathbb{Z})$.

Remarque sur l'orientabilité. L'hypothèse d'orientabilité signifie ici que l'on peut choisir une orientation dans chaque fibre de L de manière à ce que cette famille d'orientations soit localement constante lorsqu'on la lit dans des cartes de trivialisations du fibré. Lorsque B est une variété et $L = TB$, ceci coïncide avec la définition habituelle de l'orientabilité. Comme pour les variétés, puisqu'une orientation d'une fibre L_b détermine uniquement une orientation du fibré au-dessus d'un voisinage de b , l'on peut définir un transport local des orientations le long de chemins continus dans B et l'orientabilité de L équivaut au fait que le transport de l'orientation depuis une fibre au-dessus d'un point b vers une fibre au-dessus d'un point b' ne dépend pas du choix du chemin allant de b à b' . Ce transport local ne dépend par ailleurs que de la classe d'homotopie à extrémités fixées du chemin en question. De façon équivalente, le morphisme

$$\pi_1(B; b) \rightarrow \{\pm 1\}$$

déterminé par le transport des orientations est trivial pour tout point $b \in B$.

Notons par ailleurs qu'une orientation de L_b équivaut à la donnée d'une orientation de la sphère $S(L_b) \subset L_b$ déterminée par n'importe quel choix de métrique sur L_b . En vue du fait que

$$\pi_1(S(L_b)) \simeq H_1(S(L_b); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

ceci équivaut à se donner un générateur de $\pi_1(S(L_b))$. L'orientabilité de L équivaut au fait que les isomorphismes $\pi_1(S(L_b)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S(L_{b'}))$ déterminés par le transport parallèle dans L le long de chemins dans B ne dépendent pas du choix de chemin allant de b à b' . Autrement dit, les groupes $\pi_1(S(L_b))$ sont canoniquement isomorphes lorsque b varie dans une composante connexe par arcs de B . De façon équivalente, le morphisme

$$\pi_1(B; b) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(S(L_b)))$$

est trivial pour tout point $b \in B$.

Remarque sur l'homotopie de sections. Deux sections partout non-nulles données sur B_1 ne sont pas en général homotopes sur B_1 . Considérons l'exemple explicite suivant : L est le fibré trivial de rang 2 sur le cercle S^1 . Une section partout non-nulle correspond à une application $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et sa classe d'homotopie libre est uniquement

déterminée par son degré, calculé en retractant $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sur S^1 et en regardant la section comme une application $S^1 \rightarrow S^1$. L'on voit en particulier que l'ensemble des classes d'homotopie de sections de L partout non-nulles est en bijection naturelle avec $H^1(S^1; \mathbb{Z})$.

L'on retrouve dans cette situation un isomorphisme avec $H^1(S^1; \mathbb{Z})$, et pas seulement une structure d'espace affine sur $H^1(S^1; \mathbb{Z})$, puisque le fibré est trivial. En revanche, si l'on était parti avec un fibré *trivialisable*, l'on aurait naturellement trouvé sur l'ensemble des classes d'homotopies de sections une structure d'espace affine sur $H^1(S^1; \mathbb{Z})$. Le choix d'une section correspond au choix d'une trivialisations, ou encore au choix d'un point base dans cet espace affine, ce qui l'identifie à $H^1(S^1; \mathbb{Z})$.

Démonstration du théorème 4.14. Notons $\dot{L} \xrightarrow{p} B$ la fibration dont l'espace total est $L \setminus 0_B$. Ainsi $\dot{L}_b = L_b \setminus 0$. Trouver une section de L partout non-nulle est équivalent à trouver une section de \dot{L} .

Supposons pour simplifier que B est connexe (sinon on travaille séparément sur chaque composante connexe).

(i) Montrons d'abord qu'il existe une section de \dot{L} sur B_1 . Nous construisons celle-ci d'abord sur B_0 : ceci revient à choisir un point dans la fibre de \dot{L} au-dessus de chaque 0-cellule. Puisque la fibre de \dot{L} est connexe par arcs l'on peut étendre cette section sur B_1 . Pour la même raison de connexité par arcs, toutes deux sections sont homotopes sur B_0 .

Remarque. *Supposons donnée une homotopie h sur B_0 . Cette homotopie ne s'étend pas nécessairement à B_1 , cf. la discussion du point (iii) ci-dessous et la Remarque précédente.*

(ii) Choisissons un point x_i^2 sur chaque 2-cellule e_i^2 , par exemple le centre $\phi_i(0)$ de la cellule, où $\phi_i : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (B_2, B_1)$ est l'application caractéristique.

Soit s une section définie sur B_1 . Nous nous proposons de l'étendre à B_2 . L'obstruction est fournie par la collection des classes d'homotopie libre des applications $[s \circ \phi_i | : \partial D^2 \rightarrow \dot{L}_{x_i^2}] \in \pi_1(\dot{L}_{x_i^2})$.

En vue du fait que le fibré L est orienté nous identifions chacun des groupes $\pi_1(\dot{L}_{x_i^2})$ de façon canonique à \mathbb{Z} et rassemblons cette collection de classes d'homotopie en une cochaîne $\theta(s) \in C^2(B; \mathbb{Z})$.

LA COCHAÎNE $\theta(s)$ EST UN COCYCLE. Soit e_α^3 une 3-cellule. Nous avons successivement $\delta\theta(s)(e_\alpha^3) = \theta(s)(\partial e_\alpha^3) = \theta(s)(\sum_{e_i^2} [e_\alpha^3 : e_i^2] e_i^2) = \sum_{e_i^2} \deg(p_i \circ \phi_\alpha | : \partial D^3 \rightarrow e_i^2) \deg(s \circ \phi_i | : \partial D^2 \rightarrow \dot{L}_{x_i^2})$. Ceci coïncide avec l'image de $[\phi_\alpha] \in \pi_3(B_3, B_2) \simeq H_3(B_3, B_2)$ par la composition

$$\pi_3(B_3, B_2) \xrightarrow{\partial} \pi_2(B_2) \rightarrow \pi_2(B_2, B_1) \xrightarrow{\partial} \pi_1(B_1) \xrightarrow{s_*} \pi_1(\dot{L}_x)$$

La composition des deux flèches du milieu est nulle, et l'on conclut que $\delta\theta(s) = 0$.

LA CLASSE DE COHOMOLOGIE DÉFINIE PAR $\theta(s)$ NE DÉPEND PAS DE s . ON LA NOTE $e(L)$. Ceci découle de ce que toutes deux sections s_0 et s_1 sont homotopes sur B_0 . Pour une application $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$, notons $\bar{\gamma} : I \rightarrow X$, $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$. Le choix d'une homotopie $h : s_0|_{B_0} \simeq s_1|_{B_1}$ détermine une cochaîne $d \in C^1(B; \mathbb{Z})$ définie par $d(e_j^1) = [s_0 \circ \phi_j \cup h \circ \phi_j|_{\{1\}} \cup s_1 \circ \bar{\phi}_j \cup \bar{h} \circ \phi_j|_{\{0\}} : I \times \{0\} \cup \{1\} \times I \cup I \times \{1\} \cup \{0\} \times I = \partial(I \times I) \rightarrow \dot{L}_{x_j^1}] \in \pi_1(\dot{L}_{x_j^1})$. L'on montre alors que $\delta d = \theta(s_0) - \theta(s_1)$, de sorte que les cocycles $\theta(s_0)$ et $\theta(s_1)$ sont cohomologues. En effet, pour toute 2-cellule e_i^2 nous avons $\delta d(e_i^2) = d(\partial e_i^2) = d(\sum_j [e_i^2 : e_j^1] e_j^1) = \sum_j \deg(p_j \circ \phi_i| : \partial D^2 \rightarrow e_j^1 / \partial e_j^1) d(e_j^1) = \sum_j \deg(p_j \circ \phi_i| : \partial D^2 \rightarrow e_j^1 / \partial e_j^1) [s_0 \circ \phi_j \cup h \circ \phi_j| \cup s_1 \circ \phi_j]$. L'application $\phi_i|_{\partial D^2}$ est homotope à une application ayant la propriété que ∂D^2 peut être écrit comme une union d'intervalles ayant des intérieurs disjoints, dont les extrémités se recollent, tels que ϕ_i envoie les points de recollement sur le 0-squelette B_0 et envoie chacun des intervalles de façon surjective sur une 1-cellule avec degré ± 1 . Pour une telle application de recollement la somme précédente décrit $[s_0 \circ \phi_i] \cup [s_1 \circ \bar{\phi}_i] = \theta(s_0) - \theta(s_1)$.

SI LA COCHAÎNE $\theta(s)$ EST COHOMOLOGUE À ZÉRO, LA FIBRATION \dot{L} ADMET UNE SECTION SUR B_2 . Plus précisément, l'on peut modifier la section s sur B_1 rel B_0 de manière à ce qu'elle admette une extension à B_2 . En effet, si $\theta(s) = \delta d$, en inversant la construction du point précédent l'on peut trouver une homotopie qui commence avec s , qui est constante sur B_0 et qui détermine le cocycle d . La section que s_1 que l'on obtient à l'autre bout de l'homotopie vérifie alors $\theta(s_1) = 0$ et admet donc une extension à B_2 .

SI LA FIBRATION \dot{L} ADMET UNE SECTION SUR B_2 , ALORS $e(L) = 0$. En effet, la restriction s de cette section à B_1 admet une extension et donc $\theta(s) = 0$, de sorte que $e(L) = [\theta(s)] = 0$.

LA CLASSE $e(L)$ EST FONCTORIELLE PAR RAPPORT AUX MORPHISMES DE FIBRÉS. Nous ne donnons pas ici les détails de la preuve, qui repose sur le théorème d'approximation cellulaire. Nous renvoyons le lecteur à [Steenrod, §35].

UNE SECTION SUR B_2 ADMET UNE EXTENSION À B . L'extension est construite inductivement sur la dimension du squelette. L'obstruction à étendre une section du k -squelette à une $k + 1$ -cellule e_β^{k+1} est donnée par l'élément $[s \circ \phi_\beta|_{\partial D^{k+1}}] \in [S^k, \dot{L}_{x_\beta^{k+1}}]$. Or $\pi_k(\dot{L}_{x_\beta^{k+1}}) = \pi_k(S^1) = 0$ pour $k \geq 2$, de sorte que l'extension est toujours possible.

(iii) Montrons que les classes d'homotopie de sections de $\dot{L}|_{B_1}$ forment un espace affine sur $H^1(B; \mathbb{Z})$. Nous avons vu qu'à chaque section s sur B_1 est associé un cocycle d'obstruction $\theta(s) \in C^2(B; \mathbb{Z})$, et tous

deux tels cocycles d'obstruction $\theta(s_0)$ et $\theta(s_1)$ sont cohomologues. Plus précisément, le choix d'une homotopie $h : s_0|_{B_0} \simeq s_1|_{B_0}$ détermine une cochaîne $d(s_0, h, s_1) \in C^1(B; \mathbb{Z})$ telle que $\theta(s_0) - \theta(s_1) = \delta d(s_0, h, s_1)$. Le fait que $\pi_0(L_b) = 0$ entraîne que, étant données deux telles homotopies, les cochaines correspondantes sont égales, de sorte qu'on les note $d(s_0, s_1)$.

Quitte à changer s_1 par une homotopie sur B_1 , l'on peut supposer que $\theta(s_0) = \theta(s_1)$. La cochaîne $d(s_0, s_1)$ est alors un cocycle. L'on associe de cette manière à la paire (de classes d'homotopie) (s_0, s_1) la classe $[d(s_0, s_1)] \in H^1(B; \mathbb{Z})$. La relation

$$[d(s_0, s_1)] + [d(s_1, s_2)] = [d(s_0, s_2)]$$

découle directement des définitions.

Par ailleurs, pour toute classe $d \in H^1(B; \mathbb{Z})$ et toute section s_0 il existe une section s_1 qui vérifie $[d(s_0, s_1)] = d$. Ceci démontre que l'ensemble des classes de sections sur B_1 modulo homotopie est un espace affine sur $H^1(B; \mathbb{Z})$. \square

Que se passe-t-il lorsque le fibré L n'est pas orientable? La preuve précédente ne fonctionne plus parce-que les isomorphismes $\pi_1(L_b \setminus 0) \simeq \pi_1(L_{b'} \setminus 0)$ donnés par transport parallèle le long de chemins allant de b à b' dans B ne sont plus canoniques. Il y a un moyen simple de pallier à ce défaut qui est celui de considérer des groupes de cohomologie à coefficients dans des systèmes locaux.

Théorème 4.15. *Soit $L \xrightarrow{p} B$ un fibré vectoriel de rang 2 sur \mathbb{R} dont la base est un CW-complexe. Soit \mathfrak{o}_L le système local des orientations de L de fibre \mathbb{Z} .*

(i) *Le fibré L admet une section partout non-nulle au-dessus du squelette B_1 . Deux telles sections sont homotopes sur B_0 dans l'espace des sections qui ne s'annulent pas.*

(ii) *Il existe une classe de cohomologie $e(L) \in H^2(B; \mathfrak{o}_L)$, appelée classe d'Euler, fonctorielle par rapport aux morphismes de fibrés, qui s'annule si et seulement si le fibré admet une section partout non-nulle au-dessus du squelette B_2 .*

(iii) *L'ensemble des classes d'homotopie de sections partout non-nulles sur B_1 forme un espace affine sur $H^1(B; \mathfrak{o}_L)$.* \square

Remarque 4.16. *Pour un fibré orienté de rang 2 sur \mathbb{R} , l'existence d'une section qui ne s'annule pas est équivalente à sa trivialité. En effet, l'on munit le fibré d'un produit scalaire fibre par fibre et l'on construit une deuxième section en considérant dans chaque fibre l'unique vecteur de norme 1 orthogonal à la section donnée et qui forme une base positive avec celle-ci.*

Proposition 4.17. *Soit $L \rightarrow B$ un fibré en droites complexes. Regardé en tant que fibré réel de rang 2, il possède une orientation canonique. La classe d'Euler $e(L) \in H^2(B; \mathbb{Z})$ coïncide avec la classe de Chern $c_1(L) \in H^2(B; \mathbb{Z})$.*

Démonstration. Par functorialité de la classe d'Euler et de la classe de Chern, il suffit de démontrer l'égalité dans le cas du fibré tautologique $\gamma_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty = G_1^{\mathbb{C}}$.

En fait, il suffit de le démontrer pour le fibré tautologique $\gamma = \gamma_{2,1}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^1$. En effet, la classe d'Euler est déterminée par la restriction du fibré au 2-squelette de la base, alors que $\mathbb{C}P^\infty = \lim_n \mathbb{C}P^n$ admet une décomposition cellulaire dont le 2-squelette est $\mathbb{C}P^1$. Par ailleurs, le tiré en arrière de $\gamma_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ par l'inclusion $\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ est γ . Puisque cette inclusion induit un isomorphisme sur $H^2(\cdot; \mathbb{Z})$, la classe de Chern de $\gamma_1^{\mathbb{C}}$ est déterminée par la classe de Chern de γ .

Considérons donc le fibré tautologique $\gamma \rightarrow \mathbb{C}P^1$. Par convention

$$c_1(\gamma) = -h,$$

avec $h \in H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$ le générateur qui prend la valeur -1 sur la classe fondamentale $[\mathbb{C}P^1]$ déterminée par l'orientation complexe. Nous souhaitons donc montrer que $e(\gamma) = -h$.

Considérons la décomposition cellulaire de $\mathbb{C}P^1$ constituée d'une unique cellule en dimension 0, donnée par la point $[1 : 0]$, et d'une unique cellule en dimension 2. Le complexe cellulaire $C(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$ est alors isomorphe à la cohomologie $H(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$. La cellule de dimension 2 est homéomorphe à \mathbb{C} , avec comme application caractéristique $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus \{[1 : 0]\}$, $z \mapsto [z : 1]$ (biholomorphisme sur image). L'on oriente cette 2-cellule par l'orientation complexe de \mathbb{C} . Le générateur h correspond alors à l'unique cocycle qui prend la valeur $+1$ sur cette 2-cellule. L'on trivialisé le tiré en arrière $\phi^*\gamma$ par $\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \phi^*\gamma$, $\Phi(z, \lambda) = (z, \lambda(z, 1))$. La classe d'Euler vaut $\deg_\infty \cdot h$, où \deg_∞ est le degré de l'application $S^1(R) \rightarrow \mathbb{C}^*$ déterminée par la restriction à un cercle $S^1(R)$ de rayon $R \gg 0$ d'une section asymptotiquement constante. Considérons l'autre carte sur $\mathbb{C}P^1$, notée $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus \{[0 : 1]\}$, $w \mapsto [1 : w]$ et la trivialisé $\Psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \psi^*\gamma$, $\Psi(w, \lambda) = (w, \lambda(1, w))$. Alors $\Phi^{-1}\Psi(w, \lambda) = (1/w, \lambda w)$. Pour $|w| = \epsilon \ll 1$ et $\lambda = 1$, données qui correspondent à une section asymptotiquement constante, l'on obtient $\Phi^{-1}\Psi(w, 1) = (1/w, w)$. La restriction d'une section asymptotiquement constante au cercle $S^1(R)$, $R = 1/\epsilon$ orienté positivement est donnée par l'équation $z = 1/w$. Ainsi \deg_∞ est le degré de l'application $S^1(R) \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto 1/z$, qui est égal à -1 . Ceci démontre l'égalité

$$e(\gamma) = -h.$$

□

4.2.2. Le théorème principal de la théorie de l'obstruction.

Définition 4.18. Soit $n \geq 1$ un entier. Un espace topologique est dit n -simple si l'action du groupe fondamental $\pi_1(Y; y)$ sur $\pi_n(Y; y)$ est triviale pour tout $y \in Y$.

Si l'action de $\pi_1(Y; y_0)$ est triviale sur $\pi_n(Y; y_0)$ pour un point base $y_0 \in Y$, la même propriété est vérifiée pour tout point appartenant à la composante connexe par arcs de y_0 dans Y . En règle générale nous supposons désormais que Y est connexe par arcs. La n -simplicité implique le fait que les groupes d'homotopie $\pi_n(Y; y_0)$ et $\pi_n(Y; y_1)$ sont canoniquement identifiés pour tous $y_0, y_1 \in Y$. Pour cette raison nous pouvons omettre la mention du point base et écrire $\pi_n Y$. Lorsque $n = 1$ la définition est équivalente au fait que $\pi_1(Y)$ est abélien. Dans tous les cas, le fait que Y soit n -simple est équivalent à l'égalité

$$[S^n, Y] = \pi_n(Y).$$

Théorème 4.19. Soit Y un espace n -simple, $n \geq 1$. Soit (X, A) un CW-complexe relatif. Soit $g : X_n \rightarrow Y$ une application continue.

(1) Il existe un cocycle cellulaire

$$\theta^{n+1}(g) \in C^{n+1}(X, A; \pi_n Y)$$

qui s'annule si et seulement si g admet une extension à X_{n+1} .

(2) La classe de cohomologie $[\theta^{n+1}(g)] \in H^{n+1}(X, A; \pi_n Y)$ est nulle si et seulement si la restriction $g| : X_{n-1} \rightarrow Y$ admet une extension à X_{n+1} .

Démonstration du Théorème 4.19, d'après [Davis et Kirk]. Rappelons-nous que

$$C^{n+1}(X, A; \pi_n Y) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n+1}(X, A); \pi_n Y).$$

Pour toute cellule e_i^{n+1} ayant comme application caractéristique $\phi_i : (D^{n+1}, \partial D^{n+1}) \rightarrow (X_{n+1}, X_n)$, nous définissons $\langle \theta^{n+1}(g), e_i^{n+1} \rangle \in \pi_n Y = [S^n, Y]$ comme la classe d'homotopie de l'application composée

$$S^n \xrightarrow{\phi_i|} X_n \xrightarrow{g} Y.$$

Clairement g admet une extension à X_{n+1} si et seulement si $\theta^{n+1}(g) = 0$: une telle extension équivaut à se donner une extension sur chaque cellule, ce qui équivaut à pouvoir étendre au disque D^{n+1} chaque application $g \circ \phi_i| : S^n \rightarrow Y$. Une telle extension est possible si et seulement si la classe d'homotopie de chaque telle application est triviale.

$\theta^{n+1}(g)$ EST UN COCYCLE. L'on rappelle que $C_n(X, A) = H_n(X_n, X_{n-1})$ et la différentielle cellulaire est donnée par

$$H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X_{n-1}) \xrightarrow{\text{incl}_*} H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}).$$

La différentielle cellulaire δ pour le complexe cellulaire cohomologique est définie à partir de ∂ par dualité.

La preuve du fait que $\delta\theta^{n+1}(g) = 0$ vient du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{n+1}(X_{n+2}, X_{n+1}) & \longrightarrow & H_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_{n+1}(X_{n+1}) & \longrightarrow & H_{n+1}(X_{n+1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & \longrightarrow & H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \\
 \downarrow & & \downarrow \theta^{n+1}(g) \\
 \pi_n(X_n) & \xrightarrow{g_*} & \pi_n(Y)
 \end{array}$$

Les trois premières flèches horizontales sont les morphismes de Hurewicz. La commutativité des deux premiers carrés est une propriété générale des morphismes de Hurewicz (c'est la fameuse "échelle entre homotopie et homologie"). Nous allons démontrer la commutativité du carré du bas ci-dessous. Celle-ci étant admise, le théorème de Hurewicz assure que la flèche du haut $\pi_{n+1}(X_{n+2}, X_{n+1}) \rightarrow H_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1})$ est surjective. Sur la colonne de droite nous lisons $\delta\theta^{n+1}(g)$. Sur la colonne de gauche la composition de deux dernières flèches est nulle puisqu'elles apparaissent dans la suite exacte longue d'homotopie de la paire (X_{n+1}, X_n) . Ceci nous permet de conclure.

Montrons la commutativité du carré du bas, que nous reproduisons pour plus de lisibilité.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & \xrightarrow{\rho} & H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \\
 \downarrow \partial & \searrow & \downarrow \theta^{n+1}(g) \\
 & \pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n) & \\
 & \nearrow \bar{\rho} \simeq & \\
 \pi_n(X_n) & \xrightarrow{g_*} & \pi_n(Y)
 \end{array}$$

$\searrow \overline{g_* \circ \partial}$

Considérons le groupe $\pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n)$, quotient du groupe $\pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n)$ par l'action de $\pi_1(X_n)$. Le théorème de Hurewicz assure que l'on a un isomorphisme $\bar{\rho} : \pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n) \xrightarrow{\cong} H_{n+1}(X_{n+1}, X_n)$ induit par la flèche $\rho : \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \rightarrow H_{n+1}(X_{n+1}, X_n)$. La flèche $g_* \circ \bar{\partial}$ que nous lisons sur les côtés bas et gauche du carré factorise par $\pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n)$ puisque Y est n -simple. L'on note $\overline{g_* \circ \bar{\partial}} : \pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n) \rightarrow \pi_n Y$ cette factorisation. Nous souhaitons montrer l'égalité

$$\theta^{n+1}(g) \circ \bar{\rho} = \overline{g_* \circ \bar{\partial}}.$$

Notons $x_0 \in X_0$ et $*$ $\in S^n$ les points base. Soit e_i^{n+1} une $n+1$ -cellule avec application caractéristique $\phi_i : (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (X_{n+1}, X_n)$. Soit u un chemin de x_0 à $\phi_i(p)$ dans X_n . En regardant la cellule e_i^{n+1} comme générateur de $H_{n+1}(X_{n+1}, X_n)$, un représentant pour $\bar{\rho}^{-1}(e_i^{n+1})$ est fourni par l'application $\phi_i \vee u : (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (X_{n+1}, X_n)$ obtenue en appliquant ϕ_i sur une moitié du disque D^{n+1} qui ne contient pas le point base p et en écrasant l'autre moitié du disque D^{n+1} sur un intervalle, sur lequel on applique u (Figure 9). Le but de cette opération est de ramener le point base de ϕ_i en x_0 . Sur un tel élément $\overline{g_* \circ \bar{\partial}}$ agit en lui associant la classe d'homotopie libre de $g \circ (\phi_i|_{S^n} \vee u)$, qui est homotope à $g \circ \phi_i|_{S^n}$, dont la classe est la valeur de $\theta^{n+1}(g)$.

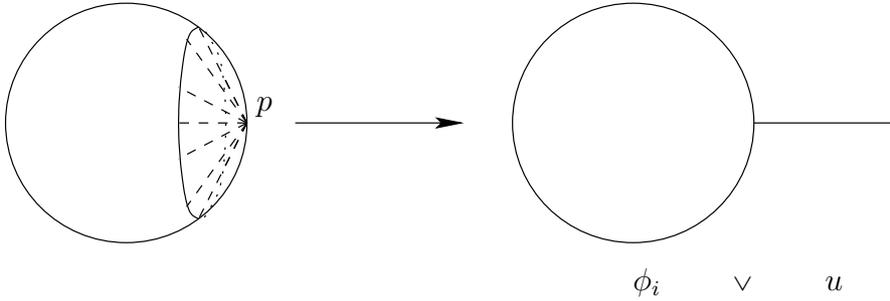


FIGURE 9

NOUS MONTRONS QUE, SI $\theta^{n+1}(g) = \delta d$, $d \in C^n(X, A; \pi_n Y)$, ALORS g PEUT ÊTRE REDÉFINIE SUR LE n -SQUELETTE RELATIVEMENT AU $n-1$ -SQUELETTE DE MANIÈRE À CE QU'ELLE ADMETTE UNE EXTENSION AU $n+1$ -SQUELETTE.

Lemme 4.20 (lemme d'homotopie). *Soient $f_0, f_1 : X_n \rightarrow Y$ deux applications continues dont les restrictions au $n-1$ -squelette sont homotopes. Le choix d'une homotopie $G : X_{n-1} \times I \rightarrow Y$ définit une cochaîne de différence $d = d(f_0, G, f_1) \in C^n(X, A; \pi_n Y)$ telle que*

$$\delta d = \theta^{n+1}(f_0) - \theta^{n+1}(f_1).$$

Démonstration du Lemme 4.20. Considérons sur l'intervalle I une décomposition cellulaire avec deux 0-cellules constituant $\partial I = \{0, 1\}$ et une 1-cellule

I . Soit $\hat{X} = X \times I$, $\hat{A} = A \times I$. Alors (\hat{X}, \hat{A}) est naturellement un CW-complexe relatif ayant pour n -squelette $\text{hat}X_n = X_n \times \partial I \cup X_{n-1} \times I$. La donnée d'une application $\hat{X}_n \rightarrow Y$ équivaut à la donnée d'une paire d'applications $f_0, f_1 : X_n \rightarrow Y$ et d'une homotopie $G : X_{n-1} \times I \rightarrow Y$ entre $f_0|_{X_{n-1}}$ et $f_1|_{X_{n-1}}$. À ces données l'on associe donc un cocycle d'obstruction

$$\theta^{n+1}(f_0, G, f_1) \in C^{n+1}(\hat{X}, \hat{A}; \pi_n Y).$$

Nous définissons $d(f_0, G, f_1) \in C^n(X, A; \pi_n Y)$ comme suit :

$$d(f_0, G, f_1)(e^n) = (-1)^{n+1} \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(e^n \times I).$$

Pour toute $n+1$ -cellule e_i^{n+1} l'on obtient alors

$$\begin{aligned} \delta \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(e_i^{n+1} \times I) &= \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(\partial(e_i^{n+1})) \\ &= \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(\partial e_i^{n+1} \times I) \\ &+ (-1)^{n+1} (\theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(e_i^{n+1} \times \{1\}) - \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(e_i^{n+1} \times \{0\})) \\ &= (-1)^{n+1} (\delta d(f_0, G, f_1)(e_i^{n+1}) + \theta^{n+1}(f_1)(e_i^{n+1}) - \theta^{n+1}(f_0)(e_i^{n+1})). \end{aligned}$$

La première égalité est la définition de δ . La deuxième égalité vient de ce que, pour un produit de CW-complexes, la différentielle vérifie $\partial(e^k \times f^\ell) = (\partial e^k) \times f^\ell + (-1)^k e^k \times (\partial f^\ell)$. Par ailleurs $\theta^{n+1}(f_0, G, f_1)$ est un cocycle, de sorte que le premier terme dans la suite d'égalités ci-dessus est nul. \square

Lemme 4.21 (lemme de réalisation). *Soit $f_0 : X_n \rightarrow Y$ et soit $G : X_{n-1} \times I \rightarrow Y$ une homotopie telle que $G_0 = f_0|_{X_{n-1}}$. Pour tout $d \in C^n(X, A; \pi_n Y)$ il existe une application $f_1 : X_n \rightarrow Y$ telle que $f_1|_{X_{n-1}} = G_1$ et $d = d(f_0, G, f_1)$.*

Démonstration du lemme 4.21. Il s'ensuit de la preuve du Lemme d'homotopie 4.20 que la valeur de la cochaîne $d(f_0, G, f_1)$ sur une n -cellule e_i^n avec application caractéristique ϕ_i est définie en tant que classe d'homotopie libre dans $[S^n, Y]$, ou encore en tant qu'élément de $\pi_n Y$, de la manière suivante : l'on regarde S^n comme $\partial(D^n \times I) = D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I \cup D^n \times \{1\}$, que l'on envoie dans Y via l'application $(f_0 \cup G \cup f_1) \circ (\phi_i \times \text{Id})|_{\partial(D^n \times I)}$.

$$\begin{array}{ccc} D^n \times I & \xrightarrow{\phi_i \times \text{Id}} & X_n \times I \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial(D^n \times I) & \xrightarrow{\phi_i \times \text{Id}|} & (X \times I)_n \xrightarrow{f_0 \cup G \cup f_1} Y \end{array}$$

Avec cette description du cocycle, il suffit de montrer que, étant donnée $f : D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I \rightarrow Y$ et $\alpha \in [\partial(D^n \times I), Y]$, il existe $F : \partial(D^n \times I) \rightarrow Y$ qui étend f telle que $[F] = \alpha$. Ceci est une conséquence de la propriété d'extension des homotopies pour la paire

$(\partial(D^n \times I), D)$, avec $D = D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$. Soit $K : \partial(D^n \times I) \rightarrow Y$ une application qui représente α . Puisque D est contractile nous avons $K|_D \simeq f$. Cette homotopie donnée sur D admet une extension H sur $\partial(D^n \times I)$. L'on prend alors $F = H_1$. \square

La preuve du point 2. du théorème 4.19 est maintenant pour l'essentiel finie : l'on suppose $\theta^{n+1}(g) = \delta d$. Le lemme de réalisation ?? appliqué à l'homotopie constante $g|_{X_{n-1}} \simeq g|_{X_{n-1}}$ fournit $g' : X_n \rightarrow Y$ telle que $d(g, \text{Id}, g') = d$ et $g'|_{X_{n-1}} = g|_{X_{n-1}}$. Mais par le lemme d'homotopie 4.20 l'on a $\theta^{n+1}(g) - \theta^{n+1}(g') = \delta d(g, \text{Id}, g') = \delta d$, de sorte que $\theta^{n+1}(g') = 0$ et g' admet une extension à X_{n+1} . \square

4.2.3. Théorème d'obstruction pour les homotopies. Ce que nous avons précédemment appelé "théorème principal de la théorie des obstructions" a de multiples variantes. Nous en donnons une concernant les homotopies, qui en est un cas particulier.

Théorème 4.22 (théorème d'obstruction pour les homotopies). *Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ deux applications continues, (X, A) un CW-complexe relatif, Y un espace topologique n -simple. L'on suppose donnée une homotopie $G : X_{n-1} \times I \rightarrow Y$. Il existe une classe d'obstruction*

$$[\theta(G)] \in H^n(X, A; \pi_n Y)$$

qui s'annule si et seulement si $G|_{X_{n-2} \times I}$ s'étend en une homotopie sur X_n .

Remarque. En pratique, l'on pense l'énoncé de la manière suivante : l'on se donne une homotopie $f_0|_A \simeq f_1|_A$ que l'on cherche à étendre à X . L'on raisonne de manière récursive et, en supposant avoir construit l'homotopie G sur le squelette X_{n-1} , l'on essaie d'étendre celle-ci au squelette X_n . L'énoncé du théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une extension après éventuelle modification de G rel X_{n-2} .

Démonstration. Le point clé est de considérer le CW-complexe relatif (X^*, A^*) donné par

$$X^* = X \times I, \quad A^* = X \times \partial I \cup A \times I.$$

Ainsi le n -squelette de X^* est $X_n^* = X \times \partial I \cup X_{n-1} \times I$ et la donnée d'une application $G^* : X_n^* \rightarrow Y$ équivaut à la donnée d'une paire d'applications $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ et d'une homotopie $G : f_0|_{X_{n-1}} \simeq f_1|_{X_{n-1}}$. Par ailleurs

$$H^{n+1}(X^*, A^*) \simeq H^n(X, A).$$

Ceci est un cas particulier de la formule de Künneth en cohomologie relative C.6. La classe recherchée est la classe d'obstruction $[\theta^{n+1}(f_0 \cup G \cup f_1)] \in H^{n+1}(X^*, A^*; \pi_n Y) \simeq H^n(X, A; \pi_n Y)$, tel qu'il découle directement du Théorème principal 4.19. \square

Remarque. L'on peut bien-sûr énoncer un théorème d'obstruction pour des homotopies d'applications définies partiellement $f_0, f_1 : X_n \rightarrow Y$, mais la formulation n'est plus si transparente. Quoi qu'il en soit, la stratégie est claire : il s'agit d'exhiber un CW-complexe relatif adapté à la situation.

4.2.4. *Théorème d'obstruction pour les sections de fibrations.* L'énoncé que nous discutons ici est strictement plus général que le Théorème principal 4.19. La démonstration est néanmoins analogue, avec des complications de nature purement technique liées à l'utilisation des systèmes locaux de coefficients.

L'on étudie une fibration $E \xrightarrow{p} X$ au-dessus d'un CW-complexe relatif (X, A) , dont la fibre est connexe par arcs et n -simple. L'on note $F_x = p^{-1}(x)$, $x \in X$. Les groupes d'homotopie $\pi_n F_x$ sont définis sans mention de point base et s'assemblent en un système local sur X que l'on note

$$\{\pi_n F\}.$$

De manière explicite, étant donné un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ et une application $f : S^n \rightarrow F_{\gamma(0)}$, la propriété de relèvement des homotopies assure l'existence d'une homotopie $\tilde{f} : S^n \times [0, 1] \rightarrow E$ telle que $p \circ \tilde{f}_t = \gamma(t)$ et $\tilde{f}_0 = f$. La classe d'homotopie $[\tilde{f}_1] \in [S^n, F_{\gamma(1)}] = \pi_n F_{\gamma(1)}$ est indépendante des choix. L'application

$$\tau_\gamma : \pi_n F_{\gamma(0)} \rightarrow \pi_n F_{\gamma(1)}, \quad [f] \mapsto [\tilde{f}_1]$$

définit un morphisme de groupes qui ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixées de γ . Celui-ci est bijectif : l'inverse est donné par $\tau_{\tilde{\gamma}}$.

Théorème 4.23 (théorème d'obstruction pour les sections de fibrations). *Soit $E \xrightarrow{p} X$ une fibration au-dessus d'un CW-complexe relatif (X, A) , dont la fibre est connexe par arcs et n -simple. Soit $g : X_n \rightarrow E$ une section définie sur le n -squelette de la base.*

- (1) *Il existe un cocycle cellulaire $\theta^{n+1}(g) \in C^{n+1}(X, A; \{\pi_n F\})$ qui s'annule si et seulement si g admet une extension à X_{n+1} .*
- (2) *La classe de cohomologie $[\theta^{n+1}(g)] \in H^{n+1}(X, A; \{\pi_n F\})$ s'annule si et seulement si $g|_{B_{n-1}}$ admet une extension en une section définie sur B_{n+1} .*

Esquisse de preuve. La preuve suit exactement les mêmes lignes que dans le cas du Théorème principal 4.19. La différence principale est la suivante : pour définir la valeur de $\theta^{n+1}(g)$ sur une $n + 1$ -cellule e_i^{n+1} avec application caractéristique $\phi_i : (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (X_{n+1}, X_n)$ nous commençons par trivialisier $\phi_i^* E$ au-dessus de D^{n+1} . Le point clé

est qu'une telle trivialisaton n'est canoniquement définie à homotopie près que sous la forme

$$\phi_i^* E \simeq D^{n+1} \times E_{x_i^{n+1}},$$

où $x_i^{n+1} \in e_i^{n+1}$ est un point base sur la cellule (par exemple le centre $\phi_i(0)$). Bien-sûr, nous pouvons trouver des trivialisations $D^{n+1} \times F$, avec F la fibre type, mais ceci suppose avoir *choisi* une équivalence d'homotopie (ou un difféomorphisme, si l'on travaille avec des variétés) $E_{x_i^{n+1}} \simeq F$. Ce choix n'est pas canonique et détruit en général la propriété de cocycle à valeurs dans $\pi_n F$. Néanmoins, la propriété de cocycle reste valable à coefficients dans le système local $\{\pi_n F\}$ puisque, dans la démonstration, nous utilisons la trivialisaton canonique à homotopie près au-dessus d'une unique cellule e_i^{n+2} , qui étend les trivialisations canoniques à homotopie près sur toutes les cellules situées sur son bord. \square

Remarque. Le Théorème principal 4.19 est un cas particulier du théorème précédent en considérant une fibration triviale.

Exercice. Énoncer et démontrer une variante du Théorème 4.19 pour des applications $X_n \rightarrow Y$ avec Y un espace qui n'est pas n -simple.

4.2.5. *Classe d'obstruction primaire.* Comme le dit [Steenrod, §35], les résultats précédents sont parfaitement satisfaisants dans la situation suivante. L'on considère une fibration $E \xrightarrow{p} X$ au-dessus d'un CW-complexe X , avec fibre F connexe par arcs.

Soit $q \geq 1$ le plus petit entier tel que $\pi_q F \neq 0$. Si $q = 1$, l'on suppose que F est 1-simple, c'est-à-dire que $\pi_1 F$ est abélien.

Théorème 4.24 (classe d'obstruction primaire). *Dans la situation précédente :*

- (1) E admet une section au-dessus de X_q . Toutes deux sections sont homotopes à travers des sections en restriction à X_{q-1} .
- (2) Les classes d'obstruction de toutes deux sections définies sur X_q coïncident. Leur valeur commune

$$\theta^{q+1}(E) \in H^{q+1}(X; \{\pi_q F\})$$

est appelée classe d'obstruction primaire.

- (3) La fibration admet une section sur X_{q+1} si et seulement si la classe d'obstruction primaire est nulle.
- (4) Les classes d'homotopie de sections définies sur X_q forment un espace affine sur $H^q(X; \{\pi_q F\})$.

Démonstration. Pour le point 1. l'on applique le Théorème 4.23 concernant l'extension de section de façon inductive pour construire une

section sur X_q . Toutes deux sections sont homotopes sur X_0 puisque la fibre est supposée connexe par arcs, et l'on applique à nouveau le théorème pour construire des homotopies sur X_{q-1} .

Le point 2. découle de ce que toute homotopie sur X_{q-1} détermine une cochaîne d telle que δd est la différence des cocycles d'obstruction associés à deux sections données (Lemme 4.20). Ceux-ci sont par conséquent cohomologues.

Le point 3. est clair par le Théorème 4.23.

Le point 4. découle en combinant le Théorème 4.23 sur les sections avec le Théorème 4.22 sur les homotopies, comme dans le Théorème 4.14 sur la classe d'Euler des fibrés de rang 2 sur \mathbb{R} . \square

Exercice. Énoncer et démontrer un théorème concernant la classe d'obstruction primaire associée à une fibration au-dessus d'un CW-complexe relatif (X, A) . L'on supposera donnée – et fixée – une section au-dessus de A , ou encore une classe d'homotopie de sections au-dessus de A .

4.2.6. Classe d'Euler.

Théorème 4.25. Soit $\xi \xrightarrow{\sigma} B$ un fibré vectoriel de rang n sur \mathbb{R} , ayant comme base un CW-complexe.

0. Le système local $\{\pi_{n-1}\xi_b \setminus 0\}$ est trivial si et seulement si ξ est orientable. On le note $\mathfrak{o}(\xi)$ et on l'appelle système local des orientations de ξ .

1. Le fibré admet une section partout non-nulle sur le squelette B_{n-1} . Toutes deux telles sections sont homotopes (à travers des sections) sur le squelette B_{n-2} .

2. Il existe une classe de cohomologie $e(\xi) \in H^n(B; \mathfrak{o}(\xi))$, appelée classe d'Euler, qui s'annule si et seulement si le fibré ξ admet une section partout non-nulle sur B_n .

3. Les classes d'homotopie de sections partout non-nulles définies sur B_{n-1} forment un espace affine sur $H^{n-1}(B; \mathfrak{o}(\xi))$.

Démonstration. Le point 0. est une conséquence de la discussion concernant les orientations, que nous avons développée lorsque nous avons défini la classe d'Euler d'un fibré en droites. Le point 1. et le point 2. sont une conséquence directe du théorème concernant les classes d'obstruction primaires. La classe $e(\xi)$ est la classe d'obstruction primaire de la fibration $\xi \setminus 0 \xrightarrow{p} B$. Le point 3. se démontre de la même manière que dans le Théorème 4.14. \square

Propriétés de la classe d'Euler

(a) functorialité : $e(f^*\xi) = f^*e(\xi)$ pour $f : B' \rightarrow B$. Ceci est une propriété commune aux classes d'obstruction primaires.

(b) soit $e(\xi \oplus \mathbb{R}) = 0$, où \mathbb{R} désigne le fibré trivial de rang 1 sur \mathbb{R} . En particulier la classe d'Euler n'est pas une classe caractéristique stable par somme directe avec des fibrés triviaux, à la différence des classes de Stiefel-Whitney et Chern.

(c) soit ξ un fibré de rang impair. Alors $2e(\xi) = 0 \in H^q(B; \mathfrak{o}(\xi))$. En effet, l'involution $I : (b, v) \mapsto (b, -v)$ renverse l'orientation dans chaque fibre et relève Id_B . Au niveau du système local $\mathfrak{o}(\xi)$ elle induit un automorphisme qui est $-\text{Id}$ dans chaque fibre. Ainsi $I^* : H^*(B; \mathfrak{o}(\xi)) \rightarrow H^*(B; \mathfrak{o}(\xi))$ est la multiplication par -1 . Par functorialité $e(I^*\xi) = I^*e(\xi) = -e(\xi)$, mais $I^*\xi = \xi$ donc $e(\xi) = -e(\xi)$.

(d) Soit M^n une variété fermée orientée. L'on note $[M]$ sa classe fondamentale, $e(M) = e(TM) \in H^n(M; \mathbb{Z})$ et

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(M; \mathbb{Q})$$

sa *caractéristique d'Euler-Poincaré*.

Théorème 4.26. *L'on a*

$$\langle e(M), [M] \rangle = \chi(M).$$

□

Ceci justifie la terminologie de *classe d'Euler*. Pour une preuve le lecteur pourra consulter [Husemoller, §18.7]. La preuve implique les notions de classe fondamentale, classe de Thom, isomorphisme de Thom, et dualité de Poincaré. Nous touchons brièvement à certaines d'entre elles dans la dernière partie du cours.

Notons par ailleurs que l'égalité précédente fait sens aussi dans le cas non-orientable : en notant \mathfrak{o}_M le système local d'orientation de M avec fibre \mathbb{Z} , l'on a $e(M) \in H^n(M; \mathfrak{o}_M)$, $[M] \in H_n(M; \mathfrak{o}_M)$ et $\langle e(M), [M] \rangle \in H_0(M; \mathfrak{o}_M \otimes \mathfrak{o}_M)$. Or $\mathfrak{o}_M \otimes \mathfrak{o}_M = \mathbb{Z}$, ce qui fait que le dernier groupe d'homologie est canoniquement isomorphe à \mathbb{Z} .

4.2.7. *Classes de Stiefel-Whitney et Chern comme classes d'obstruction.*

(I) CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY.

Définition 4.27. *Soit $\xi^n \rightarrow B$ un fibré vectoriel de rang n sur \mathbb{R} . La j -ème classe d'obstruction de Stiefel-Whitney, notée*

$$w_j^{\text{obstr}}(\xi) \in H^j(B; \mathbb{Z}/2),$$

est la réduction modulo 2 de la classe primaire d'obstruction du fibré $V_{n-j+1}(\xi)$ dont les fibres sont les variétés de Stiefel des $n-j+1$ -repères dans les fibres de ξ . Autrement dit, $w_j^{\text{obstr}}(\xi)$ est la réduction modulo 2

de la classe primaire d'obstruction à l'existence de $n - j + 1$ sections linéairement indépendantes sur le squelette B_j .

Rappelons que la fibre $V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)$ est $j - 2$ -connexe, avec $j - 2 = n - (n - j + 1) - 1$. Ainsi le fibré $V_{n-j+1}(\xi)$ possède toujours une section sur le squelette B_{j-1} , toutes deux telles sections sont homotopes sur le squelette B_{j-2} , et il existe une section sur le squelette B_j si et seulement si la classe primaire d'obstruction

$$\theta^j(V_{n-j+1}(\xi)) \in H^j(B; \{\pi_{j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)\})$$

est nulle. Rappelons par ailleurs que

$$\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & j \text{ pair et } j < n, \\ \mathbb{Z}, & j \text{ impair ou } j = n. \end{cases}$$

Dans la première situation, où $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{Z}/2$, le système local $\{\pi_{j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)\}$ est nécessairement trivial puisque $\mathbb{Z}/2$ ne possède pas d'automorphismes non-triviaux. La classe primaire d'obstruction vit alors dans $H^j(B; \mathbb{Z}/2)$ et l'on a $w_j^{obstr}(\xi) = \theta^j(V_{n-j+1}(\xi))$.

Dans la deuxième situation, où $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{Z}$, le système local de coefficients $\{\pi_{j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)\}$ peut être non trivial. Néanmoins, puisque la fibre \mathbb{Z} admet un unique morphisme non-trivial vers $\mathbb{Z}/2$, la réduction modulo 2 de ce système local existe toujours et est un système local trivial. Dans cette situation $w_j^{obstr}(\xi) = \theta^j(V_{n-j+1}(\xi)) \bmod 2$ est en général différente de la classe d'obstruction $\theta^j(V_{n-j+1}(\xi))$.

Les classes primaires d'obstruction étant fonctorielles, l'on a $\theta^j(f^*\xi) = f^*\theta^j(\xi)$ pour toute application continue $f : B' \rightarrow B$, et les réductions modulo 2 vérifient en particulier aussi

$$w_j^{obstr}(f^*\xi) = f^*w_j^{obstr}(\xi).$$

Theorem 4.28. *L'on a égalité entre les classes de Stiefel-Whitney $w_j(\xi)$ définies comme tirés en arrière des classes de Stiefel-Whitney universelles sur la grassmannienne $G_n^{\mathbb{R}}$, et les classes de Stiefel-Whitney d'obstruction $w_j^{obstr}(\xi)$:*

$$w_j(\xi) = w_j^{obstr}(\xi) \in H^j(B; \mathbb{Z}/2).$$

cf. [Milnor, Thm. 12.1]. Soit $\gamma_n^{\mathbb{R}} \rightarrow G_n^{\mathbb{R}}$ le fibré tautologique et w_1, \dots, w_n ses classes de Stiefel-Whitney, de sorte que $H^*(G_n^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[w_1, \dots, w_n]$. Il s'ensuit qu'il existe des polynômes en n -variables $f_j \in \mathbb{Z}/2[Y_1, \dots, Y_n]$, $j = 1, \dots, n$ tels que

$$w_j^{obstr}(\gamma_n^{\mathbb{R}}) = f_j(w_1, \dots, w_n).$$

Puisque $w_j^{obstr}(\gamma_n^{\mathbb{R}}) \in H^j(G_n^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2)$, il s'ensuit que chaque polynôme f_j est de la forme

$$f_j(w_1, \dots, w_n) = f'_j(w_1, \dots, w_{j-1}) + \lambda_j w_j,$$

avec $f'_j \in \mathbb{Z}/2[w_1, \dots, w_{j-1}]$ homogène de degré j et $\lambda_j \in \mathbb{Z}/2$.

Par functorialité, pour tout fibré $\xi \rightarrow B$ de rang n l'on a

$$w_j^{obstr}(\xi) = f'_j(w_1(\xi), \dots, w_{j-1}(\xi)) + \lambda_j w_j(\xi).$$

Montrons d'abord que $f'_j = 0$. Considérons à ce propos le fibré $\xi = \gamma_{j-1}^{\mathbb{R}} \oplus \epsilon_{n-j+1}^{\mathbb{R}} \rightarrow G_{j-1}^{\mathbb{R}}$, avec $\epsilon_{n-j+1}^{\mathbb{R}}$ le fibré trivial de rang $n-j+1$. Le fibré ξ admet $n-j+1$ sections globales linéairement indépendantes en chaque point. Par conséquent, la classe d'obstruction $\theta^j(V_{n-j+1}(\xi))$ est nulle, et il en est de même pour sa réduction modulo 2 : $w_j^{obstr}(\xi) = 0$. Par ailleurs, par stabilité de la classe de Stiefel-Whitney w_j , l'on a $w_j(\xi) = w_j(\gamma_{j-1}^{\mathbb{R}}) = 0$. Ainsi

$$f'_j(w_1(\gamma_{j-1}^{\mathbb{R}}), \dots, w_{j-1}(\gamma_{j-1}^{\mathbb{R}})) = 0$$

et, puisque les classes de Stiefel-Whitney universelles sont linéairement indépendantes, l'on obtient que $f'_j = 0$.

Nous avons donc

$$w_j^{obstr}(\xi) = \lambda_j w_j(\xi)$$

pour tout fibré $\xi \rightarrow B$ de rang n , avec $\lambda_j = \lambda_{j,n} \in \mathbb{Z}/2$. Nous souhaitons montrer que $\lambda_j = 1$ pour tout j . Nous donnons la démonstration uniquement pour $j = n$. (La démonstration pour $j < n$ est similaire mais utilise une description géométrique d'un générateur de $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n))$ que nous n'avons pas discutée, cf. [Steenrod, §25.6].)

Considérons le fibré $\xi \rightarrow \mathbb{R}P^n$ défini comme suit : après identification par dualité $\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{P}((\mathbb{R}^{n+1})^\vee) \cong G_{n+1,n}^{\mathbb{R}}$, le fibré ξ est le fibré tautologique $\gamma_{n+1,n}^{\mathbb{R}} \rightarrow G_{n+1,n}^{\mathbb{R}}$ au-dessus de la grassmannienne des n -plans dans \mathbb{R}^{n+1} . De façon équivalente, en regardant $\mathbb{R}P^n$ comme $S^n/\{\pm 1\}$, la fibre de ξ au-dessus d'un point $[(u, -u)] \in \mathbb{R}P^n$ est l'hyperplan $u^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Fixons un point $u_0 \in S^n$, avec $p = [(u_0, -u_0)] \in \mathbb{R}P^n$ le point associé sur $\mathbb{R}P^n$. La correspondance

$$[(u, -u)] \mapsto u_0 - \langle u_0, u \rangle u$$

définit une section de ξ qui s'annule uniquement au point p . En choisissant une décomposition cellulaire de $\mathbb{R}P^n$ ayant une unique cellule en chaque dimension $\leq n$ et en choisissant le point p sur la cellule de dimension maximale, l'on obtient une section s non-nulle sur le $n-1$ -squelette de $\mathbb{R}P^n$. Le cocycle d'obstruction associé à l'unique cellule de dimension n un générateur de $\pi_{n-1}(V_1(\xi_p)) \simeq \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$. En effet, considérons la trivialisatation de ξ sur un voisinage U de p donnée de la manière suivante : pour un point q proche de p l'on note $u = u(q) \in S^n$ l'unique représentant de q qui est proche de u_0 , et la trivialisatation est $U \times \xi_p \mapsto \xi|_U$, $(q, v) \mapsto (q, v - \langle v, u \rangle u)$. Lorsque q varie sur $\mathbb{R}P^n$ le long d'une petite sphère S^{n-1} centrée en p , le point u varie sur S^n le long d'une petite sphère S^{n-1} centrée en u_0 et l'application $S^{n-1} \rightarrow u_0^\perp \setminus \{0\}$ déterminée par la section s prend la

forme $u \mapsto -(u - \langle u, u_0 \rangle u_0) / \langle u, u_0 \rangle$. En composant avec une retraction de $u_0^\perp \setminus \{0\}$ sur une sphère centrée en 0, ceci décrit une application de degré ± 1 et donc un générateur de $\pi_{n-1}(V_1(\xi_p))$ comme annoncé. La réduction modulo 2 d'une tel générateur étant non-nulle, l'on déduit que la réduction modulo 2 de la classe d'obstruction est non-nulle, de sorte que $\lambda_n \neq 0$. \square

(I) CLASSES DE CHERN.

Définition 4.29. Soit $\xi^n \rightarrow B$ un fibré vectoriel de rang n sur \mathbb{C} . La j -ème classe d'obstruction de Chern, notée

$$c_j^{obstr}(\xi) \in H^{2j}(B; \mathbb{Z}),$$

est la classe primaire d'obstruction du fibré $V_{n-j+1}(\xi)$ dont les fibres sont les variétés de Stiefel des $n - j + 1$ -repères complexes dans les fibres de ξ . Autrement dit, $c_j^{obstr}(\xi)$ est la classe primaire d'obstruction à l'existence de $n - j + 1$ sections linéairement indépendantes sur \mathbb{C} définies sur le squelette B_{2j} .

Rappelons que la fibre $V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)$ est $2j - 2$ -connexe, avec $2j - 2 = 2(n - (n - j + 1))$. Ainsi le fibré $V_{n-j+1}(\xi)$ possède toujours une section sur le squelette B_{2j-1} , toutes deux telles sections sont homotopes sur le squelette B_{2j-2} , et il existe une section sur le squelette B_{2j} si et seulement si la classe primaire d'obstruction

$$\theta^{2j}(V_{n-j+1}(\xi)) \in H^{2j}(B; \{\pi_{2j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)\})$$

est nulle. Rappelons par ailleurs que

$$\pi_{2j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)) \simeq \mathbb{Z}.$$

Remarque 4.30. Il découle de la démonstration de l'isomorphisme précédent, que nous ne détaillons pas, que le système local

$$\{\pi_{2j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)\}$$

est trivial et canoniquement isomorphe à \mathbb{Z} pour tout fibré complexe ξ . Ces propriétés sont ultimement des avatars du fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe, ou encore du fait que \mathbb{C}^n regardé comme espace vectoriel sur \mathbb{R} possède une orientation canonique.

À titre d'exemple, considérons le cas $j = n$: le choix d'un isomorphisme linéaire complexe $\xi_b \simeq \mathbb{C}^n$, qui se restreint en particulier à un homéomorphisme $\xi_b \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, met en évidence un générateur de $\pi_{2n-1}(\xi_b \setminus \{0\})$ donné par l'inclusion de la sphère unité $S^{2n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit librement et transitivement sur l'ensemble des isomorphismes linéaires complexes $\xi_b \simeq \mathbb{C}^n$, il s'ensuit que ce dernier est connexe par arcs et donc le générateur en question est indépendant des choix et donc canoniquement déterminé. Ceci équivaut au fait que le

système local $\{\pi_{2n-1}V_1(\mathbb{C}^n)\}$ est trivial et canoniquement isomorphe à \mathbb{Z} .

Toujours à titre d'exemple, considérons le cas $j = 1$: l'on a $V_n(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ est canoniquement isomorphe à \mathbb{Z} , ayant comme générateur la classe de tout lacet $\gamma : S^1 \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$\frac{\det}{|\det|} \circ \gamma : S^1 \rightarrow S^1$$

est une application de degré 1. Lorsque γ est un tel lacet, $\varphi \circ \gamma$ en est aussi un pour tout $\varphi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs et le degré est un invariant d'homotopie. Ainsi $\pi_1(\xi_b \setminus \{0\})$ possède un générateur canonique, ce qui équivaut au fait que le système local $\{\pi_1 V_n(\mathbb{C}^n)\}$ est trivial et canoniquement isomorphe à \mathbb{Z} .

Dans le cas général $1 < j < n$, l'isomorphisme $\pi_{2j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{Z}$ se ramène à l'isomorphisme canonique $\pi_{2j-1}(S^{2j-1}) \simeq \mathbb{Z}$ donné par le degré. Le fait que le système local $\{\pi_{2j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)\}$ est trivial et canoniquement isomorphe à \mathbb{Z} est établi par des arguments similaires à ceux donnés dans les cas $j = 1$ et $j = n$.

L'on définit ainsi

$$c_j^{obstr}(\xi) = \theta^{2j}(V_{n-j+1}(\xi)) \in H^{2j}(B; \mathbb{Z}).$$

Les classes primaires d'obstruction étant fonctorielles, l'on a en particulier

$$c_j^{obstr}(f^*\xi) = f^*c_j^{obstr}(\xi)$$

pour toute application continue $f : B' \rightarrow B$.

Theorem 4.31. *L'on a égalité entre les classes de Chern $c_j(\xi)$ définies comme tirés en arrière des classes de Chern universelles sur la grassmannienne $G_n^{\mathbb{C}}$, et les classes de Chern d'obstruction $c_j^{obstr}(\xi)$:*

$$c_j(\xi) = c_j^{obstr}(\xi) \in H^{2j}(B; \mathbb{Z}).$$

□

La preuve suit les mêmes lignes que celle du théorème concernant les classes de Stiefel-Whitney : l'on démontre par des considérations abstraites que pour tout fibré ξ l'on a une égalité $c_j^{obstr}(\xi) = \lambda_{j,n}c_j(\xi)$ avec $\lambda_{j,n} \in \mathbb{Z}$ une constante universelle qui ne dépend que du rang n et du degré j , et l'on procède à une analyse explicite de certains fibrés tautologiques pour démontrer que $\lambda_{j,n} = 1$ pour tous j et n .

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 4.32. *Soit ξ un fibré complexe de rang n sur \mathbb{C} . L'on a égalité*

$$c_n(\xi) = e(\xi),$$

où la classe d'Euler est calculée en considérant ξ comme un fibré vectoriel de rang $2n$ sur \mathbb{R} , muni de l'orientation canonique déterminée par la structure complexe. □

4.3. Le théorème de Leray-Hirsch. Cohomologie des Grassmanniennes.

Nous démontrons dans cette section le Théorème 4.2. Nous utilisons un minimum de technologie à travers le théorème de Leray-Hirsch.

4.3.1. Le théorème de Leray-Hirsch.

Définition 4.33. Une paire localement triviale de fibrations, notée $(E, E_0) \xrightarrow{p} B$, est une paire topologique (E, E_0) avec $E_0 \subset E$ ouvert, $E \xrightarrow{p} B$ une fibration localement triviale de fibre F , ayant la propriété qu'il existe un ouvert $F_0 \subset F$ et des trivialisations locales simultanées

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \\ & U & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} p^{-1}(U) \cap E_0 & \xrightarrow{\Phi_U|} & U \times F_0 \\ & \searrow p & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

sur un ensemble d'ouverts $U \subset B$ qui forment un recouvrement ouvert.

La fibre d'une telle fibration au-dessus d'un point $b \in B$ est par définition la paire $(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap E_0)$. Un ouvert U comme ci-dessus s'appelle ouvert de trivialisations.

Il s'ensuit de la définition que $E_0 \xrightarrow{p|} B$ est une fibration localement triviale de fibre F_0 . La notion habituelle de fibration localement triviale correspond au cas $E_0 = \emptyset$.

Définition 4.34. Une paire localement triviale de fibrations est dite de type fini s'il existe un recouvrement de la base par un nombre fini d'ouverts de trivialisations.

Dans le théorème qui suit nous utilisons des groupes de cohomologie à coefficients dans un anneau A fixé.

Théorème 4.35 (Leray-Hirsch). Soit $(E, E_0) \xrightarrow{p} B$ une paire localement triviale de fibrations de type fini telle que la cohomologie de la fibre est un A -module libre de rang fini en chaque degré.

Supposons qu'il existe une famille d'éléments $\{a_i : i \geq 1\} \subset H^*(E, E_0)$ ayant la propriété que, en restriction à chaque fibre, ils engendrent librement la cohomologie de la fibre. Alors $H^*(E, E_0)$ est un $H^*(B)$ -module libre dont les éléments a_1, \dots, a_r forment une base. La structure de module est donnée par

$$\alpha \cdot a = p^*(\alpha) \cup a, \quad \alpha \in H^*(B), \quad a \in H^*(E, E_0).$$

Démonstration. Le cas d'une fibration triviale est une conséquence du théorème de Künneth C.6. Le cas d'une fibration quelconque est démontré en utilisant la suite de Mayer-Vietoris. Pour les détails nous

renvoyons par exemple à [Husemoller §17.1, Thm. 1.1] ou [Hatcher §4.D]. \square

Remarque. Le théorème est valable plus généralement pour des fibrations de Serre, c'est-à-dire des applications qui vérifient la propriété de relèvement des homotopies pour tous les cubes, sans aucune hypothèse de type fini. La preuve dans ce cadre utilise la suite spectrale de Leray-Serre.

Remarque. L'isomorphisme $H^*(E, E_0) \simeq H^*(B) \otimes [\{a_i : i \geq 1\}]$ n'est pas en général un isomorphisme d'algèbres.

4.3.2. *La cohomologie de Grassmanniennes.* Nous démontrons maintenant le Théorème 4.2, en suivant pour l'essentiel [Hatcher, §4.D]. Pour fixer les idées nous donnons la preuve pour $G_n^{\mathbb{R}}$ et nous utilisons donc dans toute la suite des coefficients $\mathbb{Z}/2$. La preuve pour $G_n^{\mathbb{C}}$ et coefficients entiers est en tout point analogue.

La stratégie de la preuve sera la suivante. Dans une première partie nous allons construire une fibration $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} G_n^{\mathbb{R}}$ qui satisfait les hypothèses du théorème de Leray-Hirsch, telle que l'espace total E a le même anneau de cohomologie que $(G_1^{\mathbb{R}})^n$ et telle que p^* est injective et a comme image le sous-anneau des polynômes symétriques dans $H^*((G_1^{\mathbb{R}})^n)$. Dans une deuxième partie nous allons montrer que cette construction implique la conclusion du théorème.

PREMIÈRE PARTIE DE LA PREUVE.

Étape 1 : construction de la fibration $F \hookrightarrow E \rightarrow G_n^{\mathbb{R}}$.

L'on appelle *drapeau de dimension n* dans \mathbb{R}^k une suite de sous-espaces vectoriels $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n$ dans \mathbb{R}^k avec $\dim V_i = i$. De façon équivalente, un drapeau de dimension n est une suite ordonnée (L_1, \dots, L_n) de n droites vectorielles orthogonales deux à deux dans \mathbb{R}^k . L'on note

$$F_n(\mathbb{R}^k)$$

l'ensemble des drapeaux de dimension n dans \mathbb{R}^k . C'est naturellement une sous-variété fermée $(\mathbb{R}P^{k-1})^n$, de dimension $(k-1) + (k-2) + \dots + (k-n+1) = (n-1)k - (n-1)n/2$.

L'on a une fibration $F_n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^k) \xrightarrow{p} G_n(\mathbb{R}^k)$ définie par $p : (L_1, \dots, L_n) \mapsto L_1 \oplus \dots \oplus L_n$. Par passage à la limite sur $k \rightarrow \infty$ l'on obtient une fibration

$$F_n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{p} G_n^{\mathbb{R}}.$$

C'est la fibration recherchée : l'on pose

$$F = F_n(\mathbb{R}^n), \quad E = F_n(\mathbb{R}^\infty).$$

Étape 2 : calcul de la cohomologie de $F_n(\mathbb{R}^\infty)$.

La variété des drapeaux $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ est munie de n applications

$$p_i : F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow \mathbb{R}P^\infty, \quad (L_1, \dots, L_n) \mapsto L_i.$$

Nous montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n], \quad |x_i| = 1,$$

avec $x_i = p_i^*x$ et x le générateur de $H^1(\mathbb{R}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}/2$, de sorte que $H^*(\mathbb{R}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}/2[x]$.

Le cas $n = 1$ est évident puisque $F_1(\mathbb{R}^\infty) = \mathbb{R}P^\infty$. En supposant l'énoncé vrai pour $n - 1$, considérons la fibration

$$\mathbb{R}P^\infty \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{p} F_{n-1}(\mathbb{R}^\infty),$$

avec $p : (L_1, \dots, L_n) \mapsto (L_1, \dots, L_{n-1})$. Le théorème de Leray-Hirsch permet de conclure en remarquant le fait que les éléments x_n^i , $i \geq 1$ engendrent la cohomologie de chaque fibre en tant que $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel.

Étape 3 : calcul de la cohomologie de $F_n(\mathbb{R}^k)$.

L'on considère à nouveau les applications $p_i : F_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1}$, $(L_1, \dots, L_n) \mapsto L_i$ et l'on note $x_i = p_i^*x$, où x est le générateur de $H^1(\mathbb{R}P^{k-1})$, de sorte que $H^*(\mathbb{R}P^{k-1}) \simeq \mathbb{Z}/2[x]/(x^k)$. L'on montre par récurrence sur $n \geq 1$ que $H^*(F_n(\mathbb{R}^k))$ est un $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel ayant comme base

$$\{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} : 0 \leq i_j \leq k - j, j = 1, \dots, n\}.$$

Ceci découle à nouveau du théorème de Leray-Hirsch en considérant la fibration

$$\mathbb{R}P^{k-n} \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^k) \xrightarrow{p} F_{n-1}(\mathbb{R}^k)$$

donnée par $p : (L_1, \dots, L_n) \mapsto (L_1, \dots, L_{n-1})$. En effet, les éléments x_n^i , $i = 0, \dots, k - n$ engendrent la cohomologie de chaque fibre en tant que $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel.

Étape 4 : l'application $p^ : H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \rightarrow H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$ est injective.*

Nous considérons la fibration construite à la première étape $F_n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{p} G_n^{\mathbb{R}}$. Nous avons déjà calculé à l'étape 2 $H^*(F_n(\mathbb{C}^\infty))$, qui contient les classes $\{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} : 0 \leq i_j \leq n - j, j = 1, \dots, n\}$. Par l'étape 3, celles-ci engendrent librement la cohomologie de la fibre $F_n(\mathbb{R}^n)$. Par le théorème de Leray-Hirsch, $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$ est un module libre sur $H^*(G_n^{\mathbb{R}})$ ayant comme base ces mêmes classes de cohomologie

$$\{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} : 0 \leq i_j \leq n - j, j = 1, \dots, n\}.$$

Puisque cet ensemble contient la classe $1 \in H^0(F_n(\mathbb{R}^\infty))$, il s'ensuit que $p^* : H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \rightarrow H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$ est injective.

Étape 5 : l'image de $p^ : H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \rightarrow H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]$ est constituée du sous-anneau $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ des polynômes symétriques en x_1, \dots, x_n .*

L'image de p^* est contenue dans $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$. En effet, étant donnée une permutation de drapeaux $\pi : F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)$, l'application π^* induite sur la cohomologie $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]$ est déterminée par la permutation correspondante des variables x_1, \dots, x_n . Puisque $p\pi = p$ l'on obtient $\pi^*p^* = p^*$. Ceci vaut pour toute permutation π , ce qui équivaut au fait que l'image de p^* est contenue dans $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$.

Pour montrer que l'image de p^* coïncide avec $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ il suffit de montrer l'égalité

$$\dim_{\mathbb{Z}/2} H^*(G_n^{\mathbb{R}}) = \dim_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

en chaque degré $\ell \geq 0$.

Le plus simple est d'utiliser les séries de Poincaré : étant donné un $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel gradué $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ de dimension finie en chaque degré, sa *série de Poincaré* est définie comme

$$p_A(t) = \sum_{i \geq 0} \dim A_i t^i \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Ce qui rend l'utilisation des séries de Poincaré particulièrement efficaces est l'identité évidente $p_{A \otimes B}(t) = p_A(t)p_B(t)$ pour tous A, B .

Dans notre situation, nous avons les séries de Poincaré suivantes :

- pour $\mathbb{Z}/2[x]$, $|x| = 1$: $p(t) = \sum_{i \geq 0} t^i = (1 - t)^{-1}$.
- pour $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$: $q(t) = (1 - t)^{-n}$.
- pour $H^*(F_n(\mathbb{R}^n))$: $r(t) = (1 + t)(1 + t + t^2) \dots (1 + t + \dots + t^{n-1}) = (1 - t)^{-n} \prod_{i=1}^n (1 - t^i)$.
- en vue de l'isomorphisme de $\mathbb{Z}/2$ -espaces vectoriels gradués $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \simeq H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \otimes H^*(F_n(\mathbb{R}^n))$, l'on déduit que la série de Poincaré de $H^*(G_n^{\mathbb{R}})$ est

$$s(t) = q(t)/r(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t^i)^{-1}.$$

– le sous-anneau des polynômes symétriques $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ a comme base les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, avec $|\sigma_i| = i$. Ainsi $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} \simeq \mathbb{Z}/2[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \simeq \mathbb{Z}/2[\sigma_1] \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}/2[\sigma_n]$ a comme série de Poincaré le produit des séries de Poincaré des $\mathbb{Z}/2[\sigma_i]$:

$$\bar{s}(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t^i)^{-1} = s(t).$$

L'égalité $\bar{s}(t) = s(t)$ est la conclusion recherchée.

DEUXIÈME PARTIE DE LA PREUVE.

À ce stade de la preuve nous avons déjà calculé la cohomologie $H^*(G_n^{\mathbb{R}})$. Nous montrons maintenant que l'application de scindement

$$(\mathbb{R}P^\infty)^{\times n} \xrightarrow{f} G_n^{\mathbb{R}}$$

définie au §4.1 induit une application $f^* : H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \rightarrow (H^*(\mathbb{R}P^\infty))^{\otimes n} \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]$ qui est injective et dont l'image coïncide avec le sous-anneau des polynômes symétriques en les variables x_1, \dots, x_n . L'observation clé est que les applications

$$F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{p} G_n^{\mathbb{R}}$$

et

$$F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{i} (\mathbb{R}P^\infty)^{\times n} \xrightarrow{f} G_n^{\mathbb{R}}$$

sont homotopes. En effet, toutes les deux sont des applications classifiantes pour le fibré tautologique $\mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n$ de rang n au-dessus de $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ dont la fibre au-dessus d'un drapeau (L_1, \dots, L_n) est $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$. Ceci est clair pour p par construction, alors que pour $f \circ i$ nous avons

$$(f \circ i)^* \gamma_n^{\mathbb{R}} = i^* f^* \gamma_n^{\mathbb{R}} = i^* (p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_n^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) = \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n.$$

La conclusion découle alors du fait que i^* est un isomorphisme en cohomologie et la structure algébrique sur $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$ est induite par celle de $H^*((\mathbb{R}P^\infty)^{\times n})$ via i^* .

Ceci achève la preuve du Théorème 4.2 et donc la construction axiomatiques des classes de Stiefel-Whitney et Chern. \square

5. CLASSE FONDAMENTALE. DUALITÉ DE POINCARÉ

IL N'Y AURA PAS DE NOTES DE COURS SUR CETTE PARTIE. JE VOUS INVITE À ÉTUDIER LES RÉFÉRENCES INDIQUÉES

Nous avons traité en cours la définition de la classe fondamentale et celle d'orientabilité topologique d'une variété. Pour ces questions je vous recommande [Bredon, §VI.7] et [Hatcher, §3.3]. Le fait que l'orientabilité d'une variété lisse (définie en termes d'atlas) équivaut à son orientabilité au sens topologique (définie en termes de groupes d'homologie $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, $x \in M$) est le contenu de [Bredon, Proposition VI.7.15].

Dans le dernier cours, je vous ai par ailleurs donné une liste de thèmes et les énoncés de quelques théorèmes que nous n'avons pas eu le temps d'aborder en cours et que je vous invite à étudier de façon indépendante.

- définition et propriétés générales du produit cup et du produit cap : [Hatcher §3.2, 3.3]
- théorème de dualité de Poincaré : [Hatcher §3.3, Th. 3.30]
- classe de Thom d'un fibré vectoriel : [Husemoller §17.7, Th. 7.3], [Bredon §VI.11, Definition 11.1 and Corollary 11.6]
- produit cup et produit d'intersection : [Bredon §VI.11, en particulier pp. 371 sqq.]

ANNEXE A. CONNEXIONS ET DISTRIBUTIONS HORIZONTALES

Nous discutons dans cette section un point de vue inverse, mais équivalent, sur les connexions linéaires dans les fibrés vectoriels : celui des distributions horizontales, ou encore des connexions au sens de Ehresmann.

Pour un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} B$, l'espace tangent aux fibres $T_v E_p = \ker d\pi(p, v)$ est bien défini en chaque point. On le note aussi $T_{(p,v)}^{vert} E$ et on l'appelle *espace tangent vertical*. Rappelons qu'une *distribution de rang k* sur une variété est un sous-fibré de rang k du fibré tangent.

Définition A.1. Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel. Une connexion sur E est la donnée d'une distribution $H \subset TE$ transverse aux fibres et de rang égal à la dimension de la base, c'est-à-dire la donnée d'une famille lisse

$$H_{(p,v)} \subset T_{(p,v)} E, \quad (p, v) \in E$$

telle que $\dim H_{(p,v)} = \dim T_p B$ et

$$H_{(p,v)} + T_{(p,v)}^{vert} E = T_{(p,v)} E.$$

Exemple. Soit H une connexion sur E et $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^k$ une trivialisat-ion locale de E . Puisque $T_{(p,v)}(U \times \mathbb{K}^k)$ est canoniquement isomorphe à $T_p U \oplus \mathbb{K}^k$, il s'ensuit que la connexion H s'écrit à travers cette trivialisat-ion en tout point $(p, v) \in U \times \mathbb{K}^k$ comme graphe d'une application linéaire

$$A(p, v) : T_p U \rightarrow \mathbb{K}^k.$$

Toute connexion sur un fibré définit un *transport parallèle partiel* comme suit.

Proposition-Définition A.2. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un chemin lisse. Pour tout $v \in E_{\gamma(0)}$ il existe $\epsilon > 0$ et un chemin $\tilde{\gamma}_v : [0, \epsilon[\rightarrow E$ tel que

$$\pi \circ \tilde{\gamma}_v = \gamma|_{[0, \epsilon[}, \quad \tilde{\gamma}_v(0) = v.$$

Le chemin $\tilde{\gamma}_v$ est unique avec cette propriété. Étant donné v , l'on peut choisir un $\epsilon > 0$ uniforme pour la construction précédente sur un voisinage de v dans la fibre.

On appelle $\tilde{\gamma}$ un *relevé* de γ (en v , ou encore avec point base v). L'on appelle *transport parallèle partiel* l'application $w \mapsto \tilde{\gamma}_w(\epsilon)$, qui réalise un difféomorphisme entre des ouverts de $E_{\gamma(0)}$ et $E_{\gamma(\epsilon)}$.

Démonstration. Considérons le diagramme déterminé par tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* E & \xrightarrow{\Gamma} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & B \end{array}$$

La connexion H induit sur γ^*E une connexion γ^*H et le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $[0, 1]$ admet un relevé horizontal global unique qui définit un champ de vecteurs sur γ^*E . Les relevés de γ dans E sont les images par Γ des courbes intégrales de ce champ de vecteurs. Celles-ci existent et sont uniques localement à condition initiale $v \in E_{\gamma(0)} = (\gamma^*E)_0$ fixée. Par ailleurs, le flot local est un difféomorphisme local et son domaine de définition est ouvert. \square

La raison pour laquelle il faut prendre des précautions quant au domaine de définition du transport parallèle est que, dans la généralité ci-dessus, le flot de l'équation différentielle que l'on obtient sur γ^*E peut ne pas être globalement défini.

Définition A.3. *Une connexion sur un fibré est dite linéaire si le transport parallèle est linéaire dans les fibres.*

Proposition A.4. *Une connexion est linéaire si et seulement si, lorsque l'on écrit comme ci-dessus*

$$H_{(p,v)} = \text{graphe}(A(p, v) : T_pU \rightarrow \mathbb{K}^k)$$

dans une trivialisatation locale $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^k$, l'on a que $A(p, \cdot)X : \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^k$ est linéaire pour tout $X \in T_pU$.

Démonstration. Le point clé est l'observation suivante, que l'on peut aisément vérifier :

Le flot d'une équation différentielle définie sur \mathbb{K}^k est linéaire si et seulement si l'équation différentielle est linéaire.

Dans notre situation, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ est une courbe lisse prenant ses valeurs dans un ouvert où l'on écrit $H_{(p,v)} = \text{graphe}(A(p, v))$ il s'ensuit que le champ de vecteurs horizontal qui relève $\frac{\partial}{\partial t}$ sur γ^*E est

$$Y_{(t,v)} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, A(\gamma(t), v)\dot{\gamma}(t) \right).$$

Pour que le transport parallèle soit linéaire, par l'observation précédente il faut et il suffit que l'application $v \mapsto A(\gamma(t), v)\dot{\gamma}(t)$ soit linéaire en v . Comme $\dot{\gamma}(t)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans $T_{\gamma(t)}U$, la conclusion en découle. \square

Un point de vue plus algébrique mais utile est le suivant. Toute connexion H définit une projection

$$TE \rightarrow E, \quad Y \mapsto Y^{vert}$$

en décomposant de manière unique tout vecteur $Y \in T_{(p,v)}E$ comme $Y = Y^H + Y^{vert}$, avec $Y^H \in H_{(p,v)}$ et $Y^{vert} \in T_{(p,v)}^{vert}E \simeq E_p$. Étant

donnée une connexion H , pour toute section $s \in \Gamma(E)$ et tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(B)$ l'on peut définir la différentielle verticale

$$\nabla_X^H s \in \Gamma(E), \quad (\nabla_X^H s)(p) := (ds(p) \cdot X)^{vert}.$$

La différentielle verticale est clairement linéaire en X pour tout choix de connexion, linéaire ou pas.

Exercice. Vérifier que la distribution horizontale H peut être décrite comme

$$H_{(p,v)} = \{Y \in T_{(p,v)}E : \exists s \in \Gamma(E), s(p) = v, \nabla_{\pi_* X}^H s = 0\}.$$

Proposition A.5. Une connexion H est linéaire si et seulement si la différentielle verticale

$$\nabla^H : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(B, E)$$

est une application \mathbb{R} -linéaire qui vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla^H(fs) = df \otimes s + f\nabla^H s, \quad f \in \mathcal{F}(B).$$

□

L'on voit donc que le point de vue de la section 2.2.1 est équivalent au point de vue plus géométrique décrit ci-dessus.

Exercice. Soit H une connexion sur un fibré vectoriel E .

(i) Considérons le fibré $E \oplus E \rightarrow B$. Celui-ci peut être décrit de façon alternative comme le produit fibré $E_{B \times B} E$ au-dessus des applications de projection, de sorte que $T_{(b,v,w)}(E \oplus E) \simeq T_{(b,v)}E_{T_b B} \times_{T_b B} T_{(b,w)}E$, le produit fibré de $T_{(b,v)}E$ avec $T_{(b,w)}E$ au-dessus des applications $d\pi(b, v)$ et $d\pi(b, w)$. La connexion H détermine dans $E \oplus E$ une distribution $H_{B \times B} H$ transverse aux fibres de rang égal à $\dim H$, donnée par

$$(H_{B \times B} H)_{(b,v,w)} = H_{(b,v)} T_b B \times_{T_b B} H_{(b,w)}.$$

(ii) Considérons les applications

$$\alpha : E \oplus E \rightarrow E, \quad (b, v, w) \mapsto (b, v + w)$$

et, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$h_\lambda : E \rightarrow E, \quad (b, v) \mapsto (b, \lambda v).$$

Montrer que H est linéaire si et seulement si elle est invariante par α et h_λ , $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\alpha_* H_{B \times B} H = H, \quad (h_\lambda)_* H = H.$$

ANNEXE B. CW-COMPLEXES. THÉORÈME DE HUREWICZ.
THÉORÈME DE WHITEHEAD. THÉORÈME
D'APPROXIMATION CELLULAIRE.

IL N'Y AURA PAS DE NOTES DE COURS SUR CETTE PARTIE. JE
VOUS INVITE À ÉTUDIER LES RÉFÉRENCES INDIQUÉES

[Hatcher 4.1, 4.2], [Bredon IV.8, IV.9, IV.11, VII.10, VII.11]

ANNEXE C. RAPPELS D'HOMOLOGIE ET DE COHOMOLOGIE

Nous renvoyons le lecteur à tout texte de topologie algébrique pour les définitions. Nous rappelons dans cette section les énoncés des théorèmes de changement de coefficients en homologie et cohomologie, ainsi que les énoncés de différentes versions du théorème de Künneth.

Dans la suite G désigne un groupe abélien et R désigne un anneau commutatif.

Rappelons que les groupes de cohomologie à coefficients dans un anneau commutatif R forment une algèbre commutative graduée avec le produit cup \cup (voir par exemple [Hatcher §3.2]) :

$$H^i(X; R) \otimes H^j(X; R) \rightarrow H^{i+j}(X; R).$$

Théorème C.1 (Coefficients universels, [Bredon, V.7.1]). *L'on a une suite exacte naturelle en X et G , qui scinde naturellement en G (mais pas en X) :*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X; G) \xrightarrow{\text{ev}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X), G) \longrightarrow 0,$$

avec $\text{ev}(\alpha)(A) = \langle \alpha, A \rangle$.

Théorème C.2 (Coefficients universels, [Bredon, V.7.1]). *L'on a une suite exacte naturelle en X et G , qui scinde naturellement en G (mais pas en X) :*

$$0 \longrightarrow H_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{s} H_n(X; G) \longrightarrow \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow 0,$$

avec $s([a] \otimes g) = [a \otimes g]$.

On dit qu'un module gradué est de *type fini* s'il est finiment engendré en chaque degré.

Théorème C.3 (Coefficients universels, [Spanier, p. 246]). *L'on suppose que $H^*(X)$ est de type fini. L'on a une suite exacte naturelle en X et G , qui scinde naturellement en G (mais pas en X) :*

$$0 \longrightarrow H^n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{\mu} H^n(X; G) \longrightarrow \text{Tor}_R(H^{n+1}(X), G) \longrightarrow 0,$$

avec μ induit par l'isomorphisme $\text{Hom}(C_*, \mathbb{Z}) \otimes G \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*, G)$.

Théorème C.4 (Théorème de Künneth, [Husemoller, 7.4.7]). *Soient X, Y deux CW-complexes. L'on a un isomorphisme de \mathbb{Z} -modules*

$$H^n(X \times Y; G) \simeq \bigoplus_{0 \leq q \leq n} H^q(X; H^{n-q}(Y; G)).$$

Corollaire C.5 (Théorème de Künneth, [Spanier, p. 247]). *Soient X , Y tels que $H^*(Y; G)$ est de type fini. L'on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow (H^*(X; G) \otimes H^*(Y; G))^n \xrightarrow{\quad \times \quad} H^n(X \times Y; G) \\ \longrightarrow \text{Tor}_R^{n+1}(H^*(X; G), H^*(Y; G)) \longrightarrow 0$$

Théorème C.6 (Théorème de Künneth relatif, [Hatcher, Thm. 3.21]). *Soient (X, A) et (Y, B) des paires d'espace topologiques. L'on suppose que $H^*(Y, B; R)$ est libre et de rang fini en chaque degré. L'on a alors un isomorphisme d'anneaux*

$$H^*(X, A; R) \otimes H^*(Y, B; R) \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R).$$

ANNEXE D. SUITES SPECTRALES

Les suites spectrales sont un outil de calcul puissant. La référence maîtresse est le livre [McCleary], tourné vers les applications et qui contient de nombreux exemples.

En cours nous avons donné la définition de la suite spectrale de Leray-Serre d'une fibration et nous avons calculé trois exemples :

– la fibration de Hopf

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2.$$

Connaissant les homologies de la base, de la fibre, et de l'espace total, nous avons déduit la forme de la différentielle $d^2 : H_2(S^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_1(S^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$: c'est la multiplication par ± 1 .

– la fibration

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n.$$

Connaissant l'homologie de la fibre et de l'espace total nous avons déduit l'homologie de $\mathbb{C}P^n$.

– la fibration

$$\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X,$$

où X est un espace connexe par arcs avec point base x_0 et PX désigne l'espace des chemins $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = x_0$. La projection $PX \rightarrow X$ est l'évaluation à l'autre extrémité de chaque chemin $\gamma \mapsto \gamma(1)$. La fibre homotopique est l'espace ΩX des lacets à point base x_0 . Les relations fondamentales

$$\pi_k(X; x_0) \simeq \pi_{k-1}(\Omega; x_0), \quad k \geq 1$$

et

$$H_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \pi_1 / [\pi_1, \pi_1], \quad \pi_1 = \pi_1(X; x_0)$$

permettent de naviguer entre homologie et homotopie en différentes dimensions. La suite spectrale de Leray-Serre permet en particulier d'obtenir une preuve rapide du théorème de Hurewicz, cf. [McCleary, §5.2, Theorem 5.14].