

Notes de cours de Topologie algébrique

FIBRÉS VECTORIELS ET CLASSES CARACTÉRISTIQUES

Alexandru OANCEA

Université Pierre et Marie Curie

Master de mathématiques fondamentales, 2^{ème} année

22 novembre 2016

Page web du cours :

[https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/
2016-M2-TOPO-ALG/topo-alg-2016.html](https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-TOPO-ALG/topo-alg-2016.html)

PRÉREQUIS

Les applications les plus éclatantes des fibrés vectoriels concernent les variétés différentiables. Alors même que ce cours n'est pas un cours de topologie différentielle, il est fortement conseillé d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de base.

Si tel n'est pas le cas, vous pouvez par exemple lire les premiers chapitres du livre

J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Univ. Press, 1997 (1965).

Pour un aperçu plus large, voir par exemple les livres suivants qui traitent aussi la cohomologie de De Rham

J. LAFONTAINE, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 2010.

F. PAULIN, *Géométrie différentielle élémentaire*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2006-2007, disponibles en ligne :

http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf

Une autre référence possible sont les notes de cours

A. OANCEA, *Notes de cours de Géométrie différentielle*, niveau M1, UPMC, 2014-2016, disponibles en ligne

<http://www.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-GEO-DIFF/geo-diff-2016.html>

BIBLIOGRAPHIE

- (1) J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, 1974.
- (2) N. Steenrod, *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, 1999 (1951).
- (3) G. Bredon, *Topology and geometry*, Springer, GTM, 1994.
- (4) S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer, 2004 (1987).
- (5) M.W. Hirsch, *Differential topology*, Springer, GTM, 1976.

TABLE DES MATIÈRES

Prérequis	2
Bibliographie	3
1. Motivation pour l'étude des fibrés vectoriels	5
1.1. Définition d'un fibré vectoriel	5
1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels	6
2. Classification des fibrés. Homotopie	13
2.1. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères	13
2.2. Notions de topologie différentielle	19
2.3. Fibrés vectoriels et homotopie	30
Annexe A. Connexions et distributions horizontales	31

1. MOTIVATION POUR L'ÉTUDE DES FIBRÉS VECTORIELS

1.1. Définition d'un fibré vectoriel. Un fibré vectoriel de rang k sur une variété B est la donnée d'une famille lisse d'espaces vectoriels de dimension k indexée par les points de B et qui est localement constante sur B ("localement triviale"). L'on travaillera avec des espaces vectoriels réels ou complexes, auquel cas on précisera parfois "fibré vectoriel réel" ou "fibré vectoriel complexe". L'on utilisera la notation \mathbb{K} pour désigner indistinctement les corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . La définition formelle est la suivante :

Définition 1.1. *Un fibré vectoriel de rang r sur une base B est la donnée d'une variété E munie d'une submersion $\pi : E \rightarrow B$ telle que la condition suivante de trivialité locale soit satisfaite :*

la base B admet un recouvrement ouvert (U_i) tel qu'il existe des difféomorphismes $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^r$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{K}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_i \end{array}$$

et tels que, pour tous i, j , le difféomorphisme

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r,$$

est de la forme

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, v) = (p, \Phi_{ij}(p)v),$$

avec

$$\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$$

lisse.

Dans la définition précédente, l'application $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ est nécessairement de la forme $(p, v) \mapsto (p, \Phi_{ij}(p)v)$, avec $\Phi_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^r$ lisse. L'on demande à ce que cette dernière application soit un isomorphisme linéaire à $p \in U_i \cap U_j$ fixé et on la note $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$.

Terminologie. E s'appelle *espace total du fibré*; B s'appelle *base du fibré*; π s'appelle *projection*; $E_b := \pi^{-1}(b)$, $b \in B$ s'appelle *la fibre au-dessus du point b* ; les Φ_i s'appellent *trivialisations locales*; les Φ_{ij} s'appellent *applications de changement de trivialisation*. L'on note souvent un point de l'espace total par (b, v) , avec la signification $v \in E_b$.

Conséquences de la définition :

- (i) chaque fibre E_b , $b \in B$ possède une structure d'espace vectoriel de dimension r défini sur \mathbb{K} . En effet, l'on transporte la structure d'espace vectoriel de \mathbb{K}^r via une trivialisation locale Φ_i au voisinage de b . Le fait que les applications de changement de

trivialisations soient des isomorphismes linéaires assure que cette structure d'espace vectoriel est indépendante du choix de Φ_i .

Par contre, il est important de noter que la fibre E_b ne possède pas de base canonique. Si c'était le cas, tous les fibrés seraient isomorphes au fibré trivial $B \times \mathbb{K}^r$. Ceci n'est certainement pas vrai, comme nous allons le voir tout de suite.

(ii) la collection des Φ_{ij} vérifie la "condition de 1-cocycle" :

$$\forall i, j, k, \quad \Phi_{ij}\Phi_{jk} = \Phi_{ik}, \quad \Phi_{ii} = \text{Id}.$$

Réciproquement, la donnée d'un recouvrement ouvert (U_i) de B et d'un 1-cocycle $\{\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K}) : i, j\}$ définit un fibré vectoriel de rang r sur \mathbb{K} dont les applications de changement de trivialisations sont données par ce même cocycle. De façon explicite l'on a

$$E = \bigsqcup_i U_i \times \mathbb{K}^r / \sim,$$

avec, pour $(p, v) \in U_i \times \mathbb{K}^r$ et $(q, w) \in U_j \times \mathbb{K}^r$,

$$(p, v) \sim (q, w) \quad \Leftrightarrow \quad p = q \quad \text{et} \quad v = \Phi_{ij}(p)w.$$

Remarque. Étant donnée une base B qui est une variété complexe, un *fibré holomorphe au-dessus de B* est un fibré complexe qui admet une structure de variété complexe pour laquelle les applications de trivialisations sont des biholomorphismes. De façon équivalente, les applications $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$ qui constituent le cocycle de définition sont des applications holomorphes.

Attention : en règle générale, un fibré complexe sur une base B n'a rien d'holomorphe ! (par ailleurs, la base peut très bien être de dimension impaire).

1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels.

(I) *Le formalisme des fibrés vectoriels est le formalisme adapté pour décrire des objets de nature infinitésimale définis sur une variété.* Ou encore : tout fibré vectoriel peut être interprété comme la donnée d'informations supplémentaires de nature linéaire, c'est-à-dire infinitésimale, le long d'une variété.

Exemples : TB , T^*B , $\Lambda^k T^*B$.

Vous avez déjà rencontré les champs de vecteurs, les 1-formes différentielles, ou encore les k -formes différentielles. Tous ces objets sont clairement de nature infinitésimale et ils jouent un rôle important dans l'étude des variétés. Ce sont en particulier autant d'exemples de "sections de fibrés vectoriels".

Définition 1.2. Une section d'un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} B$ est une application lisse $s : B \rightarrow E$ telle que $s(b) \in E_b$ pour tout point $b \in B$. De façon équivalente,

$$\pi \circ s = \text{Id}_B.$$

Les champs de vecteurs sont les sections de TB . Les 1-formes différentielles sont les sections de T^*B . Les k -formes différentielles sont les sections de $\Lambda^k T^*B$.

L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel possède une structure naturelle d'espace vectoriel : l'addition et la multiplication par des scalaires sont définies ponctuellement. On le note

$$\Gamma(E), \text{ ou } \Gamma(B, E).$$

Mieux même, l'espace $\Gamma(E)$ est un module sur l'anneau $\mathcal{F}(B)$ des fonctions lisses sur B . Le zéro de l'espace $\Gamma(E)$ est la *section nulle*, notée souvent 0_B , qui prend la valeur $0 \in E_b$ en tout point de $b \in B$. Celle-ci définit un plongement canonique de B dans l'espace total du fibré E et justifie le dessin schématique par lequel on représente souvent un fibré vectoriel.

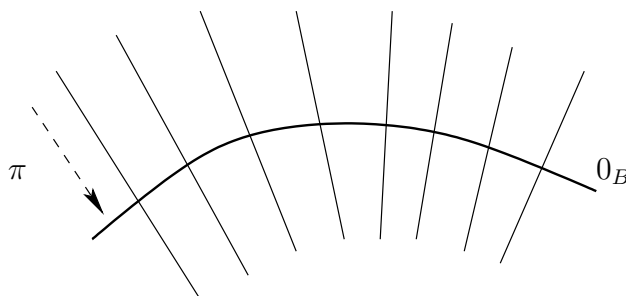


FIGURE 1

Le fait que les sections puissent être additionnées ponctuellement et aussi multipliées par des fonctions nous mène vers le point de vue suivant.

(II) *Les sections de fibrés peuvent souvent être interprétées comme des généralisations des fonctions définies sur la base B .*

L'exemple suivant est emblématique. Considérons l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ et le *fibré tautologique*

$$\mathcal{O}(-1) = \{(d, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} : v \in d\} \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}.$$

L'on vérifie que c'est un fibré holomorphe de rang 1 sur $\mathbb{C}P^n$ dont la projection est donnée par $(d, v) \mapsto d$.

Étant donné un \mathbb{K} -espace vectoriel V l'on note $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ son dual. Définissons aussi le *fibré hyperplan*

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^* = \{(d, \alpha) : \alpha \in d^*\}.$$

Posons aussi

$$\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k}, \quad \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes k}, \quad k \geq 1$$

et

$$\mathcal{O}(0) = \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}.$$

Exercice. Montrer que l'espace des sections *holomorphes* de $\mathcal{O}(-k)$, $k \geq 1$ est réduit à zéro. Montrer que l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(k)$, $k \geq 1$ s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré k à coefficients complexes en $n + 1$ variables. Montrer que l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(0)$ est de dimension 1 (toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}P^n$ est constante).

Autrement dit, alors que $\mathbb{C}P^n$ n'admet que très peu de fonctions holomorphes (les fonctions constantes), certains fibrés holomorphes en droites sur $\mathbb{C}P^n$ admettent de nombreuses sections.

Exercice. Estimer la dimension de l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{O}(k)$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

(III) *Déformations infinitésimales.*

Dans l'exemple précédent nous avons implicitement utilisé les puissances tensorielles d'un fibré en droites. De façon générale, les opérations canoniques sur les espaces vectoriels et les isomorphismes canoniques entre espaces vectoriels peuvent être mis en famille et donc passent aux fibrés. Ici, par "canonique" l'on entend "qui ne fait pas intervenir de choix de base".

Exemples : étant donnés deux fibrés E et F sur la même base, l'on peut définir leur somme directe $E \oplus F$, leur produit tensoriel $E \otimes F$, leurs duals E^* , F^* , le fibré des homomorphismes $\text{Hom}(E, F)$, canoniquement isomorphe à $E^* \otimes F$. Étant donné un sous-fibré $F \subset E$, l'on peut définir le fibré quotient E/F etc.

Exercice. Décrire la présentation des fibrés ci-dessus par des cocycles, étant données des cocycles de définition pour E et F .

Définition 1.3. *Étant donné un fibré E , un sous-fibré de rang ℓ est une sous-variété $F \subset E$ telle que, pour tout $b \in B$, $F_b \subset E_b$ est un sous-espace vectoriel de rang ℓ .*

Exercice. Montrer que F possède alors une structure naturelle de fibré vectoriel.

Le notion de fibré quotient apparaît très souvent en géométrie, notamment à travers la construction suivante.

Définition 1.4. *Soit $M \subset N$ une sous-variété. Le fibré normal à M dans N est par définition*

$$\nu_N M = TN|_M / TM.$$

Ce fibré joue un rôle important pour comprendre la façon dont M est plongée dans N à travers le théorème suivant.

Théorème 1.5 (Théorème du voisinage tubulaire, voir par exemple Bredon II.11, en particulier 11.4 et 11.14). *Soit $M \subset N$ une sous-variété. Un voisinage de M dans N est difféomorphe à un voisinage de la section nulle dans $\nu_N M$. Le difféomorphisme peut être choisi de façon à ce qu'il coïncide sur M avec le plongement donné par la section nulle.* \square

Voici deux exemples significatifs. L'on considère les deux plongements suivantes du cercle S^1 .

(a) $S^1 \subset S^2$, le plongement du cercle en tant qu'équateur. Alors $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ est le fibré trivial. Un voisinage de S^1 dans S^2 est difféomorphe à un cylindre au-dessus de S^1 .

(b) $S^1 \simeq \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$, le plongement du cercle en tant que droite à l'infini dans le plan projectif réel. L'on vérifie que l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur la paire (S^2, S^1) , dont le quotient est la paire $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1)$, détermine par linéarisation une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ dont l'élément non-trivial agit par l'application antipodale sur la base et par $v \mapsto -v$ sur la fibre. Le quotient est le fibré $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$. L'on vérifie que ce dernier est un fibré en droites réelles qui n'est pas trivial puisque toute section possède au moins un zéro. On l'appelle aussi *bande de Möbius*.

Exercice. Montrer que le fibré $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$ n'est pas trivial.

L'importance pratique du théorème de voisinage tubulaire est que, pour comprendre les "petites" déformations d'une sous-variété M à l'intérieur d'une variété N , il suffit de comprendre les déformations de la section nulle dans $\nu_N M$.

L'on a tout de suite une indication sur l'importance du problème de classification des fibrés de rang r donné sur une variété M donnée : il fournit en particulier la réponse à la question de comprendre quels sont les voisinages possibles des plongements de codimension r de M .

(IV) *Le langage des fibrés vectoriels est incontournable pour étudier les linéarisations d'équations d'origine géométrique.* Soient X, Y deux variétés et notons $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications lisses $f : X \rightarrow Y$. L'on pense à $\mathcal{F}(X, Y)$ comme étant une variété de dimension infinie (modélisée sur un espace de Fréchet). Un candidat raisonnable pour l'espace tangent à $\mathcal{F}(X, Y)$ en un point f est

$$T_f \mathcal{F}(X, Y) = \Gamma(f^*TY),$$

avec f^*TY le fibré tiré-en-arrière que nous définissons ci-dessous. En effet, en interprétant les vecteurs tangents à $\mathcal{F}(X, Y)$ au point f comme des jets d'ordre 1 en 0 de courbes $f_t, t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\epsilon > 0$ avec $f_0 = f$, l'on

identifie un tel vecteur tangent avec la famille de vecteurs tangents

$$\left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x) : x \in X \right\}.$$

Chaque vecteur tangent $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x)$ appartient à $T_{f(x)}Y$, et il s'ensuit que la famille toute entière peut être regardée comme une section d'un fibré sur X dont la fibre en un point $x \in X$ est $T_{f(x)}TY$. Ceci est exactement la définition des sections du fibré tiré-en-arrière f^*TY .

Définition 1.6. Soit $F \xrightarrow{\pi} Y$ un fibré et $f : X \rightarrow Y$ une application lisse. L'on définit le fibré tiré-en-arrière par f comme

$$f^*F = \{(x, v) : x \in X, v \in F_{f(x)}\}.$$

Exercice. Montrer que f^*F est bien un fibré localement trivial sur X . La projection $f^*F \rightarrow X$ associe à (x, v) le point x . Montrer que l'on a un diagramme commutatif

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} f^*F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

dans lequel la flèche horizontale du haut est l'identité sur chaque fibre. Montrer que f^*F muni de cette flèche $f^*F \rightarrow F$ est un objet final dans la catégorie des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

donnés par les morphismes de fibrés $E \rightarrow F$ qui relèvent f . On dit aussi que (1.1) est un *carré cartésien*. Le fibré tiré-en-arrière peut être interprété comme un produit fibré (!), ou encore comme une "limite" au sens algébrique du terme.

Revenons maintenant aux équations de nature géométrique. Une telle équation peut souvent être mise sous la forme

$$\mathcal{S}(f) = 0,$$

avec \mathcal{S} une section d'un certain fibré

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}(X, Y).$$

Typiquement la fibre \mathcal{E}_f est de dimension infinie. L'on s'intéresse à la linéarisation

$$d\mathcal{S}(f) : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow T_{(f,0)}\mathcal{E}$$

en un zéro de \mathcal{S} , c'est-à-dire en un point f tel que $\mathcal{S}(f) = (f, 0)$.

Exercice. Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel. Montrer que, pour tout $b \in B$, l'on a un isomorphisme canonique

$$T_{(b,0)}E \simeq T_bB \oplus E_b.$$

Soit $s : B \rightarrow E$ une section lisse et $b \in B$ un zéro de s , à savoir un point tel que $s(b) = (b, 0)$. Montrer que, lue à travers l'isomorphisme précédent, la différentielle de s au point b agit comme

$$ds(b) = (\text{Id}_{T_bB}, ds^{\text{vert}}(b)) : T_bB \rightarrow T_bB \oplus E_b,$$

avec

$$ds^{\text{vert}}(b) : T_bB \rightarrow E_b$$

une application linéaire.

L'on dit que s est transverse à la section nulle si $ds^{\text{vert}} : T_bB \rightarrow E_b$ est surjective pour tout zéro b de s . Montrer que cette condition est équivalente à

$$T_bB + T_{(b,0)}\text{im}(s) = T_{(b,0)}E.$$

Exercice 1. Soit M une variété et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Montrer que la section $df \in \Gamma(T^*M)$ est transverse à la section nulle si et seulement si f est une fonction de Morse.

Revenons à nouveau au contexte fonctionnel. Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ un zéro de \mathcal{S} . La différentielle $d\mathcal{S}(f)$ est donc uniquement déterminée par

$$d\mathcal{S}^{\text{vert}} : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}_f.$$

En pratique la fibre \mathcal{E}_f est elle-même décrite comme espace de sections d'un certain fibré vectoriel et l'opérateur $d\mathcal{S}^{\text{vert}}(f)$ est un opérateur linéaire et continu par rapport à un choix approprié de normes.

Exemple. Soit (Σ, j) une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1, pour laquelle on note la structure complexe par j . Ainsi $j \in \Gamma(\text{End}(T\Sigma))$, $j^2 = -\text{Id}$. Soit (Y, J) une variété complexe, pour laquelle on note J la structure complexe, de sorte que $J \in \Gamma(\text{End}(TY))$, $J^2 = -\text{Id}$. Considérons le problème de trouver des applications holomorphes parmi les applications lisses

$$f : \Sigma \rightarrow Y.$$

Le fait que la différentielle df d'une telle application soit \mathbb{C} -linéaire en tout point, c'est-à-dire qu'elle vérifie $df \circ j = J \circ df$, est équivalent à l'annulation de l'expression

$$\bar{\partial}f := df + J \circ df \circ j$$

en tout point de Σ . Notons que $\bar{\partial}f \in \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY))$, le fibré des homomorphismes \mathbb{R} -linéaires et \mathbb{C} -anti-linéaires de $T\Sigma$ dans f^*TY , encore noté $\Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY)$. L'équation des courbes holomorphes définies sur Σ à valeurs dans Y est donc

$$\bar{\partial}f = 0,$$

avec $\bar{\partial}$ interprétée comme section d'un fibré (de rang infini) \mathcal{E} au-dessus de $\mathcal{F}(\Sigma, Y)$ dont la fibre est donnée par

$$\mathcal{E}_f = \Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY).$$

La linéarisation de $\bar{\partial}$ en un zéro f est donc déterminée par l'opérateur

$$d\bar{\partial}^{vert}(f) : \Gamma(f^*TY) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY)).$$

L'on peut bien évidemment expliciter cet opérateur, par exemple en coordonnées locales. Il se trouve qu'il est elliptique et donc de Fredholm lorsqu'on le fait agir entre des complétions de Sobolev appropriées. Ses propriétés déterminent les propriétés locales de l'espace des courbes holomorphes $\Sigma \rightarrow Y$.

2. CLASSIFICATION DES FIBRÉS. HOMOTOPIE

La question que nous posons maintenant est celle de classier les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang k donné sur une base donnée. Nous allons voir que celles-ci forment un ensemble discret qui peut être mis en bijection avec certains ensembles de classes d'homotopie d'applications.

Rappelons qu'un isomorphisme entre deux fibrés E, F sur une même base B est un difféomorphisme $E \rightarrow F$ qui commute avec les projections et réalise un isomorphisme linéaire $E_b \rightarrow F_b$ entre les fibres au-dessus de tout point $b \in B$. Les isomorphismes de fibrés sont les isomorphismes dans la catégorie des fibrés au-dessus de B , dont les morphismes sont les applications lisses $E \rightarrow F$ qui commutent avec les projections et qui sont linéaires en restriction à chaque fibre.

2.1. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères. Le cas particulier où la base est une sphère fait déjà apparaître les notions clé qui permettent de comprendre le cas général.

Théorème 2.1. *Soient $k \geq 1, n \geq 1$. L'ensemble*

$$\mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(S^n)$$

des classes d'isomorphisme de fibrés de rang k sur \mathbb{K} au-dessus de la sphère S^n sont en correspondance bijective avec

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})).$$

*Ici $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ désigne le $(n-1)$ -ème groupe d'homotopie du groupe linéaire $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$, à savoir les classes d'homotopie d'applications à point base $(S^{n-1}, *) \rightarrow (\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}), \mathrm{Id})$. L'action du groupe $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ sur l'ensemble $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ est induite par l'action de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ sur lui-même par conjugaison.*

Remarque préliminaire concernant l'action de π_0 sur π_{n-1} . Pour tout groupe de Lie G , l'ensemble $\pi_0(G)$ est l'ensemble des composantes connexes de G et possède une structure de groupe canonique induite par la multiplication dans G . Pour un espace topologique X l'ensemble $\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X , mais il ne possède pas en général une structure de groupe. Pour un groupe de Lie, et plus généralement pour une variété, les composantes connexes coïncident avec les composantes connexes par arcs.

Tout groupe de Lie G agit sur lui-même par conjugaison via la représentation $G \mapsto \mathrm{Diff}(G), g \mapsto \iota_g, \iota_g(h) = ghg^{-1}$. Chacun des difféomorphismes ι_g préserve la composante connexe de l'identité. Pour deux éléments g, g' appartenant à la même composante connexe de G les applications ι_g et $\iota_{g'}$ sont homotopes en tant qu'applications

préservant le point base donné par l'élément neutre $e \in G$. Ainsi $\pi_0(G)$ agit sur tous les groupes d'homotopie d'ordre supérieur $\pi_i(G, e)$, $i \geq 1$. Cette action est bien-sûr triviale si G est connexe.

L'on a en particulier

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})) \simeq \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))$$

puisque $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ est connexe.

L'on a aussi

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})) \simeq \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$$

pour k impair. Mais en général l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})) \simeq \{\pm 1\}$ n'est pas triviale lorsque k est pair. L'on renvoie à une discussion plus détaillée à la fin de cette section.

Démonstration. Nous allons décrire une bijection explicite

$$\mathcal{R} : \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{K}}(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})).$$

(L'on utilise la notation \mathcal{R} pour signifier que l'élément $\mathcal{R}(E)$ décrit E comme "Recollement" de deux fibrés triviaux sur des boules de dimension n .)

Écrivons la sphère comme union de deux hémisphères

$$S^n = D_+^n \cup D_-^n, \quad D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$$

et fixons un point p sur l'équateur S^{n-1} . Fixons aussi un isomorphisme linéaire $E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$.

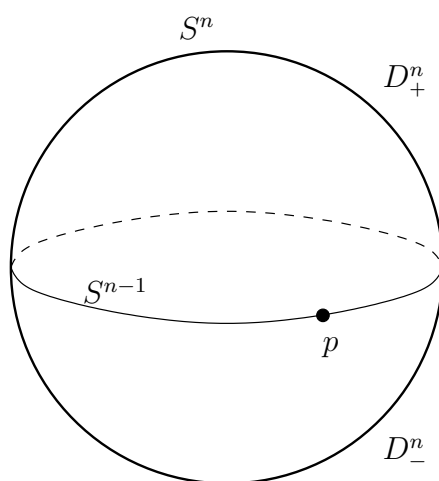


FIGURE 2

Nous démontrons l'affirmation suivante comme cas particulier d'un résultat plus général (Corollaire 2.8), après la preuve.

Affirmation No. 1 : Le fibré E est trivial en restriction à D_{\pm}^n . \square

Après composition au but par des éléments appropriés de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$, nous obtenons des trivialisations

$$\Phi_{\pm} : E|_{D_{\pm}^n} \xrightarrow{\sim} D_{\pm}^n \times \mathbb{K}^k$$

qui coïncident avec l'isomorphisme fixé au-dessus du point p . En restriction à S^{n-1} l'on obtient une application

$$\Phi = \Phi_+ \circ \Phi_-^{-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}), \quad \Phi(p) = \mathrm{Id}$$

et l'on définit

$$\mathcal{R}(E) := [\Phi],$$

la classe sous l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ de la classe d'homotopie de Φ .

Pour montrer la bonne définition de l'application \mathcal{R} il s'agit de montrer que la classe d'homotopie de Φ est indépendante du choix des trivialisations Φ_{\pm} , ainsi que du choix de l'isomorphisme $E_p \simeq \mathbb{K}^k$. En effet, lorsque l'on choisit deux trivialisations différentes Ψ_{\pm} , l'on peut écrire en restriction à S^{n-1}

$$\Psi_+ \Psi_-^{-1} = (\Psi_+ \Phi_+^{-1}) \Phi_+ \Phi_-^{-1} (\Phi_- \Psi_-^{-1}).$$

Mais $\Psi_+ \Phi_+^{-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ est une application qui admet par définition une extension à D_+^n , donc nulle homotope. Il en est de même pour $\Phi_- \Psi_-^{-1}$ et l'on conclut que $\Psi_+ \Psi_-^{-1}$ est homotope à $\Phi_+ \Phi_-^{-1}$.

Lorsque l'on change l'isomorphisme $\alpha : E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$ en $\beta : E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$, à partir de deux trivialisations Φ_{\pm} qui coïncident avec α au-dessus du point p l'on peut considérer les trivialisations $(\beta\alpha^{-1})\Phi_{\pm}$ qui coïncident avec β au-dessus du point p . Alors $\Phi_+ \Phi_-^{-1}$ change par conjugaison avec $\beta\alpha^{-1}$. La classe de (la classe d'homotopie de) Φ sous l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ ne change donc pas.

La conclusion de cette discussion est que la valeur de $\mathcal{R}(E)$ ne dépend bien que de la classe d'isomorphisme du fibré E .

L'application \mathcal{R} est surjective. En effet, étant donnée une classe de $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ représentée par $\Phi : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ avec $\Phi(p) = \mathrm{Id}$, l'on définit un fibré E tel que $\mathcal{R}(E) = [\Phi]$ par

$$E = D_+^n \times \mathbb{K}^k \sqcup D_-^n \times \mathbb{K}^k / \sim$$

où, pour $(q, v) \in D_+^n \times \mathbb{K}^k$ et $(q', v') \in D_-^n \times \mathbb{K}^k$, l'on a

$$(q, v) \sim (q', v') \quad \Leftrightarrow \quad q = q' \text{ et } v = \Phi(q)v'.$$

L'application \mathcal{R} est injective. Soient E_0, E_1 deux fibrés de rang k et construisons des applications $\Phi_i : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$, $i = 0, 1$ comme ci-dessus, avec $\Phi_i(p) = \mathrm{Id}$. Il s'agit de montrer que, si les classes $[\Phi_0]$ et $[\Phi_1]$ sont égales, alors les fibrés E_0 et E_1 sont isomorphes. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ les applications Φ_0 et Φ_1 sont homotopes. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quitte à composer au but l'isomorphisme linéaire $E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$ qui

détermine Φ_1 par un automorphisme linéaire de \mathbb{R}^k qui change l'orientation, l'on peut supposer sans perte de généralité que les applications Φ_0 et Φ_1 sont homotopes.

La construction précédente peut alors être mise en famille : une homotopie Φ_t , $t \in [0, 1]$ entre Φ_0 et Φ_1 détermine un fibré \mathcal{E} au-dessus de $S^n \times [0, 1]$, avec $\mathcal{E}|_{S^n \times \{0\}} \simeq E_0$ et $\mathcal{E}|_{S^n \times \{1\}} \simeq E_1$ par construction. La conclusion découle alors de l'affirmation suivante, qui sera aussi démontrée plus bas (cf. preuve du Corollaire 2.7).

Affirmation No. 2 : Soit B une variété et \mathcal{E} un fibré sur $B \times [0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$ les fibrés $\mathcal{E}|_{B \times \{t\}} \rightarrow B$ sont isomorphes.

□

La preuve fait apparaître plusieurs phénomènes importants :

(I) Fibrés vectoriels et homotopie. Tout fibré vectoriel sur une boule est trivial (Affirmation No. 1). Plus généralement, tout fibré sur le produit d'une variété avec un intervalle est isomorphe au tiré en arrière d'un certain fibré sur la variété en question par la projection (Affirmation No. 2, légèrement reformulée). De façon plus générale, *il existe un lien étroit entre classes d'homotopie d'applications, ou encore type d'homotopie d'espaces, et classes d'isomorphisme de fibrés.*

(II) Groupes d'homotopie d'ordre supérieur. L'énoncé du théorème 2.1 met en évidence de façon naturelle les groupes d'homotopie de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$. L'on peut se douter que, de façon plus générale, *les groupes d'homotopie des groupes linéaires jouent un rôle important dans la classification des fibrés vectoriels sur une base quelconque.*

Toute tentative de classification dans une situation concrète nécessite des outils de calcul de ces groupes d'homotopie. Nous allons expliciter plus bas la structure de groupe de ces derniers. L'exercice suivant se posera alors comme une question naturelle au lecteur.

Exercice 2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ décrire de façon directe la structure de groupe induite sur $\mathcal{V}ect_k^{\mathbb{C}}(S^n)$ par la bijection \mathcal{R} , sans se référer à la structure de groupe de $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))$. Discuter le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(III) Décompositions cellulaires. Dans la preuve du théorème 2.1 il a été utile de décomposer la sphère comme union de deux boules recollées le long de leur bord, et ce qui a permis d'avancer dans la preuve a été le fait que la restriction de tout fibré à une boule est triviale (Affirmation No. 1). De façon plus générale, *dans un problème de classification de fibrés vectoriels sur une base quelconque il sera utile de considérer des "décompositions cellulaires" de la base, c'est-à-dire de la présenter comme union de boules (de différentes dimensions, collées le long de leur bord "de façon ordonnée").*

Nous allons reprendre chacun de ces trois thèmes par la suite.

Remarque-Exercice (action de π_0 sur π_{n-1}). Rappelons que le groupe de Lie $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes, que l'on note $\mathrm{GL}_k^\pm(\mathbb{R})$ et qui sont distinguées par le signe du déterminant.

Le fait que l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ sur $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ est triviale pour k impair se justifie ainsi : la matrice diagonale $\mathrm{diag}(-1, -1, \dots, -1)$ appartient en même temps à $\mathrm{GL}_k^-(\mathbb{R})$ et au centre de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, de sorte qu'elle induit par conjugaison l'identité de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$.

Noter aussi que l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ sur lui-même induite par la conjugaison dans $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ est triviale.

Lorsque k est pair, l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ sur $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$, $n-1 \geq 1$ peut être non triviale, comme le montre l'exemple suivant.

Rappelons que le procédé de Gram-Schmidt peut être interprété comme réalisant un difféomorphisme

$$\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \simeq O(k) \times T_k,$$

avec T_k l'espace des matrices $k \times k$ triangulaires supérieures ayant des coefficients positifs sur la diagonale. Il s'ensuit que $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ se rétracte sur $O(k)$ et l'inclusion $SO(k) \hookrightarrow \mathrm{GL}_k^+(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homotopie.

Considérons $k = 2$, $n = 2$. Nous obtenons

$$\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \pi_1(SO(2)) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

et un générateur est donné par le lacet de rotations

$$\gamma : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La conjugaison par la matrice $\mathrm{diag}(-1, 1) \in \mathrm{GL}_2^-(\mathbb{R})$ fournit le lacet

$$\bar{\gamma} : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Celui-ci représente l'autre générateur de $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$, puisque $\bar{\gamma}(\theta) = \gamma(-\theta)$.

Si l'on identifie $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ à \mathbb{Z} via $\gamma \mapsto 1$, alors

$$\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))/\pi_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Montrer que les fibrés $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ forment un système complet de représentants pour $\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(S^2) \simeq \pi_1(\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})) = \pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. À quel générateur correspond $\mathcal{O}(1)$? Remarquer le fait que $\mathcal{O}(-k) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(k), \mathbb{C})$, le dual de $\mathcal{O}(k)$ en tant que fibré complexe.

Soit E un fibré complexe. Montrer que le fibré réel sous-jacent à son dual complexe est isomorphe au dual réel du fibré réel sous-jacent à E .

Montrer que tout fibré réel est isomorphe à son dual.

Ainsi $\mathcal{O}(-k)$ et $\mathcal{O}(k)$ sont isomorphes en tant que fibrés réels, ce qui reflète précisément le fait que l'action de $\pi_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ sur $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ n'est pas triviale : elle identifie $\mathcal{O}(-k)$ à $\mathcal{O}(k)$.

2.2. Notions de topologie différentielle. Cette section traite de connexions linéaires, d'approximation de fonctions continues par des fonctions lisses, et de transversalité, avec la mise en évidence de certaines applications importantes en théorie de l'homotopie.

2.2.1. Rappels sur les connexions. Le fait de travailler avec des fibrés vectoriels lisses sur des variétés présente comme avantage la possibilité d'utiliser les connexions linéaires. De façon intuitive, une connexion sur un fibré est une donnée supplémentaire qui permet de se déplacer depuis une fibre vers les fibres voisines. Autrement dit, c'est un moyen de "connecter" les fibres voisines. Le lecteur est invité à noter le fait qu'un tel mouvement n'est pas canoniquement défini dans un fibré "nu".

Nous discutons dans cette section les connexions en adoptant le point de vue des dérivées covariantes, et nous renvoyons le lecteur à l'Annexe A pour des compléments en lien avec la notion de distribution horizontale. Les Corollaires 2.7 et 2.8 ci-dessous démontrent en particulier les Affirmations 1 et 2 de la preuve précédente.

Notation. Étant donné un fibré E sur une base B et un entier $k \geq 0$, l'on note

$$\Omega^k(B, E) = \Gamma(\Lambda^k T^*B \otimes E)$$

l'espace des k -formes sur B à valeurs dans E . Ce sont les familles lisses d'applications k -multilinéaires alternées $T_p B \times \cdots \times T_p B \rightarrow E_p$, $p \in B$. L'on a par définition $\Omega^0(B, E) = \Gamma(E)$.

Définition 2.2. Une connexion linéaire est une application \mathbb{R} -linéaire

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(B, E)$$

(lue "nabla") qui vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s, \quad f \in \mathcal{F}(B).$$

Autrement dit, une connexion linéaire est une dérivation sur $\Gamma(E)$ par rapport à sa structure de $\mathcal{F}(B)$ -module. De façon explicite, pour tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(B)$, l'on a $\nabla_X s \in \Gamma(E)$ et

$$\nabla_X(fs) = df(X)s + f\nabla_X s, \quad \nabla_{fX}s = f\nabla_X s.$$

Lemme 2.3. La valeur de $\nabla_X s$ en un point $p \in B$ ne dépend que de la valeur de $X(p)$ et des valeurs de s au voisinage de p le long d'une courbe tangente à $X(p)$.

Démonstration. Montrons que, pour s fixée, la valeur $\nabla_X s|_p$ ne dépend que de $X(p)$. Montrons d'abord que celle-ci ne dépend que du germe de X en p : soit $f \in \mathcal{F}(B)$ avec $f(p) = 1$ et à support dans un voisinage U fixé de p ; alors $\nabla_{fX}s|_p = f(p)\nabla_X s|_p = \nabla_X s|_p$, ce qui prouve que cette dernière quantité ne dépend que de $X|_U$. Montrons maintenant que $\nabla_X s|_p$ ne dépend que de $X(p)$. Par linéarité en X il suffit de montrer

que $\nabla_X s|_p = 0$ si $X(p) = 0$. Par ce qui précède l'on peut supposer que X est à support compact dans un ouvert de carte (x^1, \dots, x^n) dans B , sur lequel on peut écrire $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ avec X^i des fonctions qui s'annulent en p . Quitte à multiplier par une fonction de troncature supportée dans l'ouvert de carte et égale à 1 sur le support de X , l'on peut étendre les $\frac{\partial}{\partial x^i}$ en des champs de vecteurs sur B pour lesquels on a encore $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, et finalement $\nabla_X s|_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s|_p = 0$.

Montrons maintenant que, à $X(p)$ fixé, la valeur $\nabla_X s|_p$ ne dépend que des valeurs de s au voisinage de p le long d'une courbe tangente à $X(p)$. Un argument semblable à celui du paragraphe précédent montre que $\nabla_X s|_p$ ne dépend que du germe de s en p : l'on considère une fonction $f \in \mathcal{F}(B)$ avec $f(p) = 1$ et à support dans un voisinage U fixé de p , pour laquelle on obtient $\nabla_X(fs)|_p = X_p(f)s(p) + f(p)\nabla_X s|_p = \nabla_X s|_p$. L'on peut donc supposer sans perte de généralité que s est à support compact dans un ouvert de trivialisatation U pour E . En notant (e_1, \dots, e_k) un repère local sur U , que l'on peut étendre en un système de k sections globales de E en multipliant par une fonction de troncature égale à 1 sur le support de s , l'on peut écrire $s = \sum_{i=1}^k s^i e_i$ avec s^i des fonctions à support compact. L'on obtient alors

$$\nabla_X s|_p = \sum_{i=1}^k X_p(s^i) e_i(p) + s^i(p) \nabla_X e_i.$$

La conclusion en découle puisque les quantités $X_p(s^i)$, $i = 1, \dots, k$ ne dépendent que des valeurs des s^i au voisinage de p le long d'une courbe tangente à $X(p)$. \square

Soit $\gamma : I \rightarrow B$ une courbe lisse avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une *section de E le long de γ* est une courbe lisse $s : I \rightarrow E$ telle que $\pi \circ s = \gamma$; de façon équivalente, c'est une section de $\gamma^* E$. Le lemme précédent et sa preuve suggèrent la définition suivante.

Proposition-Définition 2.4 (cf. Gallot-Hulin-Lafontaine 2.68). *Il existe un unique opérateur*

$$\nabla_t : \Gamma(\gamma^* E) \rightarrow \Gamma(\gamma^* E)$$

qui vérifie les conditions suivantes :

(i) *pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et toute section $s \in \Gamma(\gamma^* E)$, l'on a*

$$\nabla_t(fs)|_t = f'(t)s(t) + f(t)\nabla_t s|_t.$$

(ii) *si $s \in \Gamma(\gamma^* E)$ est la restriction à l'image de γ d'une section \tilde{s} définie sur un voisinage, alors*

$$\nabla_t s|_t = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{s}|_{\gamma(t)}.$$

\square

L'on appelle l'opérateur ∇_t *dérivée covariante le long de γ* . L'on renvoie à *loc. cit.* pour les détails de la preuve et nous donnons ici simplement la définition de ∇_t : étant donné un repère local (e_1, \dots, e_k) au voisinage de $\gamma(t)$, l'on écrit $s = \sum_{i=1}^k s^i(t)e_i(\gamma(t))$ et l'on pose

$$\nabla_t s|_t = \sum_{i=1}^k \frac{ds^i}{dt} e_i(\gamma(t)) + s^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} e_i|_{\gamma(t)}.$$

L'un des points qu'il faut retenir de cette définition est que, alors même qu'une section de E le long de γ peut ne pas provenir d'une section définie au voisinage (par exemple si γ est constante et s ne l'est pas), néanmoins elle peut toujours s'écrire localement en t comme combinaison linéaire à coefficients dépendant de t de sections qui sont définies au voisinage de γ .

Exercice 3. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application lisse et E un fibré sur Y . Montrer que toute connexion sur E induit naturellement une connexion sur f^*E . Montrer que la dérivée covariante ∇_t le long d'une courbe γ est la connexion induite par ∇ sur γ^*E .

Définition 2.5. Une section s définie le long d'une courbe γ est dite horizontale si

$$\nabla_t s = 0.$$

Proposition-Définition 2.6. Soit $\gamma : I \rightarrow B$ une courbe lisse. Pour tout $v \in E_{\gamma(t_0)}$ il existe une unique section horizontale s_v définie le long de γ telle que $s_v(t_0) = v$.

L'application

$$\tau_{t_0, t_1}^\gamma : E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}, \quad v \mapsto s_v(t_1)$$

est un isomorphisme linéaire. On l'appelle transport parallèle le long de γ .

Avant de donner la preuve de cette proposition importante, faisons quelques remarques préliminaires.

Remarques.

(1) L'espace des connexions sur un fibré E donné est un espace affine sur $\Omega^1(B, \text{End}(E))$. En effet, l'on vérifie sans peine que la différence de deux connexions est bien un élément de $\Omega^1(B, \text{End}(E))$ par un argument similaire à ceux du lemme 2.3 en utilisant le fait que cette différence est $\mathcal{F}(B)$ -linéaire en s .

(2) L'espace des connexions sur un fibré E est non-vide. En effet, il existe toujours une connexion sur la restriction de E à un ouvert U de trivialisations : les sections de $E|_U$ s'identifient aux fonctions $U \rightarrow \mathbb{K}^k$ et la différentielle des fonctions détermine la connexion "triviale"

$$d_X(s^1, \dots, s^k) := (ds^1 \cdot X, \dots, ds^k \cdot X).$$

Sur une variété quelconque, l'on considère un recouvrement (U_i) par des ouverts de trivialisations, une partition de l'unité subordonnée (ρ_i) , une collection de connexions ∇^i sur $E|_{U_i}$, et l'on construit une connexion globale par la formule

$$\nabla_X s := \sum_i \nabla_{X|_{U_i}}^i (\rho_i s) = \sum_i \rho_i \nabla_{X|_{U_i}}^i s.$$

Démonstration de la Proposition 2.6. Plaçons-nous sur un ouvert U de trivialisations au voisinage de $\gamma(t_0)$ et considérons t_1 tel que $\gamma([t_0, t_1]) \subset U$. Soit d la connexion triviale sur $E|_U$ et écrivons $\nabla = d - A$, avec $A \in \Omega^1(U, \text{End}(E))$. L'on vérifie alors à partir de la définition que

$$\nabla_t s = d_t s - (A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))(s).$$

Si l'on identifie s à un vecteur de fonctions $s = (s^1, \dots, s^k) : I \rightarrow \mathbb{K}^k$, alors $d_t s = \frac{ds}{dt}$. Ainsi s est horizontale si et seulement si elle vérifie l'équation différentielle *linéaire*

$$\frac{ds}{dt} = (A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)) \cdot s.$$

L'on conclut par le fait que le flot d'une équation différentielle linéaire est une famille d'isomorphismes linéaires. Ceci achève la preuve lorsque t_1 est proche de t_0 . Pour t_1 arbitraire l'on découpe l'intervalle I en sous-intervalles suffisamment petits et l'on utilise le fait que le flot d'une équation différentielle linéaire est toujours défini globalement. \square

Corollaire 2.7. *Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ deux applications homotopes et E un fibré vectoriel sur Y . Les fibrés induits $f_0^* E$ et $f_1^* E$ sont alors isomorphes.*

Démonstration. Soit $f : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie lisse (!) et considérons le fibré induit $f^* E$. Celui-ci admet une connexion linéaire. Le transport parallèle le long des courbes $\{x\} \times [0, 1]$, $x \in X$, réalise un isomorphisme entre $f_0^* E$ et $f_1^* E$. Ici l'on utilise le fait que le flot d'une équation différentielle à paramètre dépend de façon lisse du paramètre. (Dans notre cas, l'espace des paramètres est la variété X .) \square

Corollaire 2.8. *Soit E un fibré vectoriel sur une variété contractile. Alors E est isomorphe au fibré trivial.*

Démonstration. Soit B la base de E . Par définition, le fait que B soit contractile signifie que Id_B est homotope à une application constante. Or l'identité induit sur B de façon tautologique le fibré E , alors que toute application constante induit sur B le fibré trivial. L'on conclut par le corollaire précédent. \square

2.2.2. *Approximation de fonctions et homotopie.* Dans ce chapitre nous discutons quelques résultats d'approximation d'applications C^0 ou C^k entre variétés par des applications C^∞ , avec des conséquences homotopiques. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 2 du livre de M.W. Hirsch pour une discussion approfondie.

L'on considère les espaces d'applications $C^r(X, Y)$ de classe C^r , $r \geq 0$ entre deux variétés lisses. L'on suppose pour simplifier que la source X est compacte.

Nous munissons $C^r(X, Y)$, $0 \leq r < \infty$ de la topologie engendrée par les ouverts $\mathcal{N}^r(f, (U, \varphi), (V, \psi), K, \epsilon)$ suivants. Pour tout choix de cartes (U, φ) , (V, ψ) sur X , respectivement Y , pour tout choix de compact $K \subset U$ et pour tout choix de réel positif $\epsilon > 0$, étant donnée $f \in C^r(X, Y)$ l'on pose

$$\mathcal{N}^r(f, (U, \varphi), (V, \psi), K, \epsilon)$$

l'ensemble des applications $g \in C^r(X, Y)$ telles que

$$\|\psi g \varphi^{-1} - \psi f \varphi^{-1}\|_{C^r(K, V)} < \epsilon.$$

Remarque. Ceci est la définition de la “topologie faible” sur $C^r(X, Y)$, qui coïncide avec la “topologie forte” lorsque X est compacte. C'est une topologie métrisable, qui admet une métrique de définition complète et une base dénombrable. Ainsi $C^r(X, \mathbb{R}^k)$ est un espace de Banach.

Remarque. Lorsque $r = 0$, cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme déterminée par n'importe quel choix de métrique compatible avec la structure différentielle de Y .

L'espace $C^\infty(X, Y)$ est muni de la topologie donnée par la réunion des topologies induites via les inclusions $C^\infty(X, Y) \hookrightarrow C^r(X, Y)$, $0 \leq r < \infty$.

Théorème 2.9. $C^\infty(X, Y)$ est dense dans $C^r(X, Y)$, $r \geq 0$.

Démonstration. Il suffit de donner la preuve pour $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, qui est le modèle local. Le point clé est de considérer une suite régularisante $\chi_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$, $\nu \geq 1$ constituée d'applications C^∞ telles que

$$\text{supp } \chi_\nu \subset B(0, \frac{1}{\nu}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\nu = 1.$$

Étant donnée $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, la convolution

$$\chi_\nu * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\nu(x - y) f(y) dy$$

est lisse, elle converge en topologie C^r vers f , et $\text{supp } \chi_\nu * f \subset \text{supp } f + B(0, \frac{1}{\nu})$, de sorte que cette construction locale peut être implantée sur une variété en utilisant une partition de l'unité. \square

Une variante utile de ce résultat est la suivante :

Corollaire 2.10. *Soit $A \subset X$ un fermé et $f \in C^r(X, Y)$ lisse au voisinage de A . Il existe une suite d'applications $f_\nu \in C^\infty(X, Y)$, $\nu \geq 1$ qui coïncident avec f au voisinage de A et telles que $f_\nu \xrightarrow{C^r} f$, $\nu \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème d'approximation 2.9 à la fonction $(1 - \chi)f$, avec $\chi : X \rightarrow [0, 1]$ une fonction de troncature lisse supportée au voisinage de A et égale à 1 au voisinage de A . \square

Proposition 2.11. *Deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ qui sont C^0 -proches sont homotopes.*

Démonstration. Choisissons une métrique riemannienne sur Y . Puisque X est compacte, les images de f et g sont contenues dans un compact de Y , sur lequel le rayon d'injectivité de la métrique riemannienne est strictement positif. Notons-le $\epsilon > 0$. Dès que $\|f - g\|_{C^0} < \epsilon$, tous deux points $f(x)$ et $g(x)$ peuvent être reliés par une unique géodésique minimisante. En paramétrant celle-ci à vitesse constante comme $\gamma_x(t)$, $t \in [0, 1]$ l'application $(x, t) \mapsto \gamma_x(t)$, $x \in X$, $t \in [0, 1]$ réalise une homotopie entre f et g . \square

La discussion ci-dessus a comme conséquence directe les deux corollaires suivants.

Corollaire 2.12. *Deux applications lisses sont reliées par une homotopie continue si et seulement si elles sont reliées par une homotopie lisse.* \square

Ceci justifie le fait que, dans l'énoncé et la preuve du théorème 2.1, nous n'avons pas précisé si l'on travaille avec des classes d'homotopie lisses ou continues.

Corollaire 2.13. *Tout invariant par homotopie lisse défini pour des applications lisses admet une unique extension en un invariant par homotopie continue défini pour des applications continues.* \square

Par exemple, toute application lisse $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme $f^* : H_{DR}^*(Y) \rightarrow H_{DR}^*(X)$ en cohomologie de De Rham. Les arguments ci-dessus montrent que l'on peut aussi définir un tel morphisme f^* pour toute application f continue, de sorte que la relation fondamentale $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ soit toujours vérifiée. À titre d'exemple, ceci fournit une preuve directe du théorème de Brouwer C^0 : *il n'existe pas d'application continue $B^n \rightarrow S^{n-1}$ qui étende $\text{Id}_{S^{n-1}}$* . Cet énoncé implique de manière classique le théorème de point fixe de Brouwer : *toute application continue $B^n \rightarrow B^n$ possède un point fixe*.

La possibilité de définir un morphisme induit en cohomologie de De Rham pour les applications continues est par ailleurs une indication

du fait que la cohomologie de De Rham est un invariant de nature topologique. En effet, celle-ci est isomorphe à la cohomologie singulière à coefficients réels.

2.2.3. *Transversalité.* La notion de transversalité permet d'utiliser des méthodes de géométrie différentielle en topologie algébrique.

Définition 2.14. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application différentiable et $Z \subseteq Y$ une sous-variété. L'on dit que f est transverse à Z si la condition suivante est vérifiée : pour tout point $x \in X$ tel que $f(x) \in Z$, l'on a

$$df_x(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y.$$

Dans ce cas on utilise la notation

$$f \pitchfork Z,$$

lue “ f est transverse à Z ” (Figure 3).

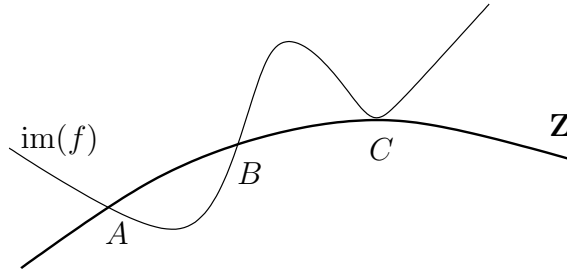


FIGURE 3. f est transverse à Z aux points A et B , mais pas au point C

Voici deux situations importantes :

- (i) Si $\dim X < \operatorname{codim} Z$, alors $f \pitchfork Z$ si et seulement si $\operatorname{im}(f) \cap Z = \emptyset$.
- (ii) Si $Z = \{p\}$ est un point, alors $f \pitchfork Z$ si et seulement si p est une valeur régulière pour f .

Proposition 2.15. Soit $f : X \rightarrow Y$ lisse et $Z \subseteq Y$ une sous-variété. Si $f \pitchfork Z$ alors $f^{-1}(Z) \subset X$ est une sous-variété de codimension égale à la codimension de Z .

Démonstration. Soit $\mathcal{U} \subset Y$ un voisinage tubulaire de Z , que l'on identifie à un voisinage de la section nulle dans le fibré normal à Z dans Y , noté $\nu_Y Z$. Soit $x \in X$ tel que $f(x) \in Z$. Considérons une trivialisations locale $\mathcal{U} \simeq U \times \mathbb{R}^{\operatorname{codim}(Z)}$ au-dessus d'un voisinage U de $f(x)$ dans Z . La condition de transversalité pour les points voisins de $f^{-1}(f(x))$ équivaut au fait que 0 est une valeur régulière de $\operatorname{pr}_2 \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^{\operatorname{codim}(Z)}$ dans cette trivialisations locale. Puisque $f^{-1}(Z) = (\operatorname{pr}_2 \circ f)^{-1}(0)$ au voisinage de $f^{-1}(f(x))$, la conclusion en découle. \square

La notion de transversalité peut être vue comme l'analogue “en famille” de la notion de valeur régulière pour une fonction. Rappelons que, étant donnée une fonction $f : X \rightarrow Y$, un point $p \in Y$ est une *valeur régulière* si la condition suivante est vérifiée : pour tout point

$x \in f^{-1}(p)$, la différentielle $df_x : T_x X \rightarrow T_p Y$ est surjective. Un point p est une *valeur critique* si ce n'est pas une valeur régulière, autrement dit si la condition suivante est vérifiée : il existe un point $x \in f^{-1}(p)$ tel que la différentielle $df_x : T_x X \rightarrow T_p Y$ n'est pas surjective (un tel point $x \in X$ est appelé *point critique*). Il est important de noter que tout point $p \in Y \setminus \text{im}(f)$ est par définition une valeur régulière. Par contraste, lorsque $p \in Y$ est une valeur critique alors $f^{-1}(p) \neq \emptyset$, aussi par définition.

Le prototype des théorèmes de transversalité est le théorème de Sard. Le lecteur pourra en trouver la démonstration par exemple dans le livre de M.W. Hirsch.

Théorème 2.16 (Théorème de Sard). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application lisse. L'ensemble de ses valeurs critiques est de mesure nulle dans Y . L'ensemble de ses valeurs régulières est dense dans Y .* \square

En appliquant le théorème de Sard à des espaces de fonctions appropriés vus comme des variétés de dimension infinie modelées sur des espaces de Banach, l'on peut démontrer le résultat suivant. À nouveau, l'on renvoie au livre de M.W. Hirsch pour une preuve et pour une discussion beaucoup plus détaillée du sujet.

Théorème 2.17. *Soient X, Y des variétés et $Z_1, \dots, Z_k \subseteq Y$ des sous-variétés. Supposons X compacte. L'ensemble des applications lisses de X dans Y qui sont simultanément transverses à tous les $Z_i, i = 1, \dots, k$ est dense dans $C^\infty(X, Y)$.* \square

En particulier, toute application $X \rightarrow Y$ peut être approximée en norme C^0 par une application lisse qui lui est homotope et qui est transverse à une sous-variété donnée Z .

Une variante du théorème de transversalité est le suivant.

Théorème 2.18. *Soit $E \rightarrow B$ une fibré vectoriel. L'ensemble des sections de E qui sont transverses à la section nulle est dense dans $\Gamma(E)$.*

Remarque. Lorsqu'une certaine propriété est valable pour un sous-ensemble dense d'une certaine classe d'applications, l'on dit que la propriété en question est *générique*. Une situation emblématique est représentée par le cas des sous-ensembles qui sont denses en tant qu'intersections dénombrables d'ouverts denses dans un espace métrique complet (théorème de Baire). On parle alors de *généricité au sens de Baire*.

Voici une application des méthodes d'approximation et de transversalité au calcul des groupes d'homotopie des sphères.

Proposition 2.19. *Soit $n \geq 2$. L'on a*

$$\pi_k(S^n) = 0, \quad 1 \leq k < n.$$

Démonstration. Soit $f : (S^k, *) \rightarrow (S^n, *)$, $1 \leq k < n$ une application continue à point base. Soit $p \in S^n$ différent du point base. Par approximation et transversalité il existe $g : (S^k, *) \rightarrow (S^n, *)$ lisse, homotope à f et transverse à la sous-variété $Z = \{p\}$. Puisque $\dim S^k < \text{codim } Z$, l'on conclut que $\text{im}(g) \subset S^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$. Ce dernier espace étant contractile, g est homotope à une constante, donc f aussi. \square

Le fait que les sphères S^k , $k \geq 2$ soient simplement connexes a comme conséquence le fait important suivant.

Proposition 2.20. *Soit $(X, *)$ un espace topologique à point base admettant un revêtement universel $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$. Considérons un point base $\tilde{*} \in \tilde{X}$ tel que $\pi(\tilde{*}) = *$. Pour tout $k \geq 2$ l'application*

$$\pi_* : \pi_k(\tilde{X}, \tilde{*}) \rightarrow \pi_k(X, *), \quad [f] \mapsto [\pi \circ f]$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Nous démontrons ici que π_* est bijective. Le fait que π_* est un morphisme de groupes est un fait général, qui sera discuté lorsque nous décrirons en détail la structure de groupe sur les π_k , $k \geq 2$.

L'application π_* est surjective puisque toute application vers X ayant comme source un espace simplement connexe admet un relèvement en une application vers \tilde{X} .

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{*}) \\ & \nearrow \text{---} & \downarrow \pi_* \\ (S^k, *) & \longrightarrow & (X, *) \end{array}$$

L'application π_* est injective puisque les homotopies se relèvent aussi à extrémités fixées. \square

Il est utile de rappeler ici un autre calcul fondamental. La preuve utilise des résultats sur les revêtements.

Proposition 2.21. *L'on a*

$$\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

et

$$\pi_k(S^1) = 0, \quad k \geq 2.$$

Démonstration. Utilisons le modèle $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et prenons comme point base $* = 1 \in S^1$. Le point clé est de remarquer le fait que le revêtement universel du cercle est $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$.

Puisque le revêtement universel du cercle est contractile, la Proposition 2.20 implique alors directement l'énoncé sur les π_k , $k \geq 2$.

Pour démontrer l'énoncé sur le π_1 nous associons à toute application continue $f : (S^1, *) \rightarrow (S^1, *)$ un *degré* $\deg f \in \mathbb{Z}$ défini comme suit. L'application f admet un relèvement unique $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(0) = 0$. La condition de relèvement est $\pi \tilde{f} = f \pi$, de sorte que $\tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$. L'on pose $\deg f = \tilde{f}(1)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1. \end{array}$$

L'on vérifie que deux applications homotopes ont même degré. Par ailleurs, tout entier est réalisé comme degré d'une application. En effet, $k = \deg(f : z \mapsto z^k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi le degré réalise une bijection

$$\deg : \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Le lecteur pourra vérifier que \deg est même un isomorphisme de groupes. \square

2.3. Fibrés vectoriels et homotopie.

Nous expliquons dans cette section le lien entre fibrés vectoriels et homotopie. Ceci fournira une certaine réponse à la question de la classification des fibrés vectoriels de rang donné sur une base quelconque.

ANNEXE A. CONNEXIONS ET DISTRIBUTIONS HORIZONTALES

Nous discutons dans cette section un point de vue inverse, mais équivalent, sur les connexions linéaires dans les fibrés vectoriels : celui des distributions horizontales, ou encore des connexions au sens de Ehresmann.

Pour un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} B$, l'espace tangent aux fibres $T_v E_p = \ker d\pi(p, v)$ est bien défini en chaque point. On le note aussi $T_{(p,v)}^{\text{vert}} E$ et on l'appelle *espace tangent vertical*. Rappelons qu'une *distribution de rang k* sur une variété est un sous-fibré de rang k du fibré tangent.

Définition A.1. Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel. Une connexion sur E est la donnée d'une distribution $H \subset TE$ transverse aux fibres et de rang égal à la dimension de la base, c'est-à-dire la donnée d'une famille lisse

$$H_{(p,v)} \subset T_{(p,v)} E, \quad (p, v) \in E$$

telle que $\dim H_{(p,v)} = \dim T_p B$ et

$$H_{(p,v)} + T_{(p,v)}^{\text{vert}} E = T_{(p,v)} E.$$

Exemple. Soit H une connexion sur E et $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^k$ une trivialisat-ion locale de E . Puisque $T_{(p,v)}(U \times \mathbb{K}^k)$ est canoniquement isomorphe à $T_p U \oplus \mathbb{K}^k$, il s'ensuit que la connexion H s'écrit à travers cette trivialisat-ion en tout point $(p, v) \in U \times \mathbb{K}^k$ comme graphe d'une application linéaire

$$A(p, v) : T_p U \rightarrow \mathbb{K}^k.$$

Toute connexion sur un fibré définit un *transport parallèle partiel* comme suit.

Proposition-Définition A.2. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un chemin lisse. Pour tout $v \in E_{\gamma(0)}$ il existe $\epsilon > 0$ et un chemin $\tilde{\gamma}_v : [0, \epsilon[\rightarrow E$ tel que

$$\pi \circ \tilde{\gamma}_v = \gamma|_{[0, \epsilon[}, \quad \tilde{\gamma}_v(0) = v.$$

Le chemin $\tilde{\gamma}_v$ est unique avec cette propriété. Étant donné v , l'on peut choisir un $\epsilon > 0$ uniforme pour la construction précédente sur un voisinage de v dans la fibre.

On appelle $\tilde{\gamma}$ un *relevé* de γ (en v , ou encore avec point base v). L'on appelle *transport parallèle partiel* l'application $w \mapsto \tilde{\gamma}_w(\epsilon)$, qui réalise un difféomorphisme entre des ouverts de $E_{\gamma(0)}$ et $E_{\gamma(\epsilon)}$.

Démonstration. Considérons le diagramme déterminé par tiré en arrière

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* E & \xrightarrow{\Gamma} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & B \end{array}$$

La connexion H induit sur γ^*E une connexion γ^*H et le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $[0, 1]$ admet un relevé horizontal global unique qui définit un champ de vecteurs sur γ^*E . Les relevés de γ dans E sont les images par Γ des courbes intégrales de ce champ de vecteurs. Celles-ci existent et sont uniques localement à condition initiale $v \in E_{\gamma(0)} = (\gamma^*E)_0$ fixée. Par ailleurs, le flot local est un difféomorphisme local et son domaine de définition est ouvert. \square

La raison pour laquelle il faut prendre des précautions quant au domaine de définition du transport parallèle est que, dans la généralité ci-dessus, le flot de l'équation différentielle que l'on obtient sur γ^*E peut ne pas être globalement défini.

Définition A.3. Une connexion sur un fibré est dite linéaire si le transport parallèle est linéaire dans les fibres.

Proposition A.4. Une connexion est linéaire si et seulement si, lorsque l'on écrit comme ci-dessus

$$H_{(p,v)} = \text{graphe}(A(p, v) : T_pU \rightarrow \mathbb{K}^k)$$

dans une trivialisatation locale $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^k$, l'on a que $A(p, \cdot)X : \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^k$ est linéaire pour tout $X \in T_pU$.

Démonstration. Le point clé est l'observation suivante, que l'on peut aisément vérifier :

Le flot d'une équation différentielle définie sur \mathbb{K}^k est linéaire si et seulement si l'équation différentielle est linéaire.

Dans notre situation, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ est une courbe lisse prenant ses valeurs dans un ouvert où l'on écrit $H_{(p,v)} = \text{graphe}(A(p, v))$ il s'ensuit que le champ de vecteurs horizontal qui relève $\frac{\partial}{\partial t}$ sur γ^*E est

$$Y_{(t,v)} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, A(\gamma(t), v)\dot{\gamma}(t) \right).$$

Pour que le transport parallèle soit linéaire, par l'observation précédente il faut et il suffit que l'application $v \mapsto A(\gamma(t), v)\dot{\gamma}(t)$ soit linéaire en v . Comme $\dot{\gamma}(t)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans $T_{\gamma(t)}U$, la conclusion en découle. \square

Un point de vue plus algébrique mais utile est le suivant. Toute connexion H définit une projection

$$TE \rightarrow E, \quad Y \mapsto Y^{vert}$$

en décomposant de manière unique tout vecteur $Y \in T_{(p,v)}E$ comme $Y = Y^H + Y^{vert}$, avec $Y^H \in H_{(p,v)}$ et $Y^{vert} \in T_{(p,v)}^{vert}E \simeq E_p$. Étant

donnée une connexion H , pour toute section $s \in \Gamma(E)$ et tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(B)$ l'on peut définir la différentielle verticale

$$\nabla_X^H s \in \Gamma(E), \quad (\nabla_X^H s)(p) := (ds(p) \cdot X)^{vert}.$$

La différentielle verticale est clairement linéaire en X pour tout choix de connexion, linéaire ou pas.

Exercice. Vérifier que la distribution horizontale H peut être décrite comme

$$H_{(p,v)} = \{Y \in T_{(p,v)}E : \exists s \in \Gamma(E), s(p) = v, \nabla_{\pi_* X}^H s = 0\}.$$

Proposition A.5. Une connexion H est linéaire si et seulement si la différentielle verticale

$$\nabla^H : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(B, E)$$

est une application \mathbb{R} -linéaire qui vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla^H(fs) = df \otimes s + f\nabla^H s, \quad f \in \mathcal{F}(B).$$

□

L'on voit donc que le point de vue de la section 2.2.1 est équivalent au point de vue plus géométrique décrit ci-dessus.

Exercice. Soit H une connexion sur un fibré vectoriel E .

(i) Considérons le fibré $E \oplus E \rightarrow B$. Celui-ci peut être décrit de façon alternative comme le produit fibré $E_{B \times B} E$ au-dessus des applications de projection, de sorte que $T_{(b,v,w)}(E \oplus E) \simeq T_{(b,v)}E_{T_b B} \times_{T_b B} T_{(b,w)}E$, le produit fibré de $T_{(b,v)}E$ avec $T_{(b,w)}E$ au-dessus des applications $d\pi(b, v)$ et $d\pi(b, w)$. La connexion H détermine dans $E \oplus E$ une distribution $H_{B \times B} H$ transverse aux fibres de rang égal à $\dim H$, donnée par

$$(H_{B \times B} H)_{(b,v,w)} = H_{(b,v)} T_b B \times_{T_b B} H_{(b,w)}.$$

(ii) Considérons les applications

$$\alpha : E \oplus E \rightarrow E, \quad (b, v, w) \mapsto (b, v + w)$$

et, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$h_\lambda : E \rightarrow E, \quad (b, v) \mapsto (b, \lambda v).$$

Montrer que H est linéaire si et seulement si elle est invariante par α et h_λ , $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\alpha_* H_{B \times B} H = H, \quad (h_\lambda)_* H = H.$$