Université Pierre et Marie Curie — Cours Fondamental I : Topologie algébrique
M2 Mathématiques fondamentales 2016-2017 — P. Georgieva, A. Oancea

Examen du 6 janvier 2017

Durée : 3 heures

Sont autorisées les notes individuelles de cours et de TD, ainsi que le polycopié du cours. Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. Nous souhaitons montrer qu'il n'existe pas de plongement de $\mathbb{C}P^2$ dans S^6. Ici S^6 désigne la sphère de dimension 6.

(i) Montrer que

$$H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[h]/(h^3), \qquad |h| = 2.$$

(ii) Montrer que la classe de Stiefel-Whitney totale de $T\mathbb{C}P^2$ est donnée par l'expression

$$w(T\mathbb{C}P^2) = 1 + h + h^2.$$

(iii) Supposons qu'il existe un plongement $\mathbb{C}P^2 \hookrightarrow S^6$. Montrer que le fibré normal à $\mathbb{C}P^2$ dans S^6, noté ν, vérifie

$$w(\nu) = 1 + h.$$

(iv) Soit $M^4 \hookrightarrow S^6$ une sous-variété orientable compacte sans bord.

(iv.1) Montrer que le fibré normal à M dans S^6, noté ν, est orientable.

(iv.2) Montrer que la classe d'Euler de ν est nulle. *(L'on utilisera le fait que, pour un fibré orienté $E \to M$ de rang r, la classe d'Euler $e(E) \in H^r(M;\mathbb{Z})$ est la restriction à M d'une classe $U \in H^r(E, E\backslash M;\mathbb{Z})$, que l'on appelle classe de Thom.)*

(iv.3) Montrer que ν est trivial.

(v) Conclure.

Exercice 2. Nous calculons dans cet exercice les premiers groupes d'homotopie non-nuls des variétés de Stiefel réelles, avec une application aux classes de Stiefel-Whitney.

L'on note $V_k\mathbb{R}^n$ la variété de Stiefel des k-repères *orthogonaux* dans $\mathbb{R}^n$. À titre d'exemple $V_1\mathbb{R}^{n+1} = S^n$.

Première partie : étude de $V_k\mathbb{R}^n$ et réduction à $V_2\mathbb{R}^n$.

(1) Montrer que l'application

$$p : V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1} \to V_1\mathbb{R}^{n+1}, \qquad p(v_1, \ldots, v_{k+1}) = v_{k+1}$$

est une fibration localement triviale de fibre $V_k\mathbb{R}^n$.

(2) Considérons l'inclusion

$$j : V_k\mathbb{R}^n \hookrightarrow V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1}, \qquad j(v_1, \ldots, v_k) = (v_1, \ldots, v_k, e_{n+1}).$$

Ici $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que

$$j_* : \pi_i(V_k\mathbb{R}^n) \to \pi_i(V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1})$$

est un isomorphisme pour $i \leqslant n-2$.

(3) En déduire que

$$\pi_i(V_k\mathbb{R}^n) = 0, \qquad i \leqslant n-k-1.$$

(4) L'on suppose connu que

$$\pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \text{ pair}, \\ \mathbb{Z}/2, & n \text{ impair}. \end{cases}$$

Montrer que

$$\pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 1 \text{ ou } n-k \text{ pair}, \\ \mathbb{Z}/2, & k \geqslant 2 \text{ et } n-k \text{ impair}. \end{cases}$$

Deuxième partie : étude de $V_2\mathbb{R}^n$.

Soit $E \to S^n$ *une fibration localement triviale lisse de fibre* F*. Soit* $\Phi : (S^{n-1}, *) \to (\mathrm{Diff}_0(F), \mathrm{Id})$ *l'application qui la définit via* $E \simeq D^n_+ \times F \sqcup D^n_- \times F/\sim$*, avec* $D^n_\pm$ *deux hémisphères qui s'intersectent le long d'un équateur* $D^n_+ \cup D^n_- = S^n$*,* $D^n_+ \cap D^n_- = S^{n-1}$ *et* $(x,p) \sim (y,q)$*,* $(x,p) \in D^n_+ \times F$*,* $(y,q) \in D^n_- \times F$ *si et seulement si* $x = y \in S^{n-1}$ *et* $p = \Phi(x)q$*. Soit* $p_0 \in F$ *et* $c : (S^{n-1}, *) \to (F, p_0)$ l'application caractéristique *définie par*

$$c(x) = \Phi(x)p_0.$$

(5) Considérons le morceau

$$\pi_n(S^n, *) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, p_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(E, p_0) \longrightarrow 0$$

de la suite exacte d'homotopie de la fibration $E \to S^n$. Montrer que l'image par ∂ d'un génerateur de $\pi_n(S^n)$ est représentée par l'application c.

(6) Soit $c_{n-1} : S^{n-2} \to S^{n-2}$ l'application caractéristique du fibré tangent unitaire $S(TS^{n-1}) \to S^{n-1}$. Montrer que

$$\pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \qquad d = \deg(c_{n-1}).$$

L'on suppose par la suite avoir calculé

$$\deg(c_{n-1}) = \begin{cases} 0, & n \text{ pair}, \\ \pm 2, & n \text{ impair}, \end{cases}$$

de sorte que le calcul de $\pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n)$ *indiqué au (4) est valable.*

Troisième partie : application aux classes de Stiefel-Whitney.

(7) Montrer qu'un générateur de $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}\mathbb{R}^n)$ est représenté par l'application $f : S^{j-1} \to V_{n-j+1}\mathbb{R}^n$ décrite de façon explicite comme suit : l'on fixe un $n-j$-repère dans $\mathbb{R}^n$, noté $(v_1, \ldots, v_{n-j})$; l'on note $V = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-j})$; l'on considère la sphère unité $S^{j-1} \subset V^\perp$; enfin, l'on définit $f : S^{j-1} \to V_{n-j+1}\mathbb{R}^n$ par

$$f(v) = (v, v_1, \ldots, v_{n-j}).$$

(8) Soit ξ un fibré vectoriel de rang n sur $\mathbb{R}$ au-dessus d'un CW-complexe B. Démontrer que, pour tout $1 < j < n$, la définition de la j-ème classe de Stiefel-Whitney de ξ en tant que réduction modulo 2 d'une classe d'obstruction primaire coïncide avec la définition qui prend comme point de départ le calcul de la cohomologie des variétés de Grassmann.