Algèbre géométrique - TD2
Espaces affines

Exercice 1 :
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$.
Calculer la dimension du sous-espace affine $\mathcal{H}$ engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.
Donner des exemples de toutes les situations possibles pour les dimensions de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ quand $\mathcal{E}$ est de dimension ≤ 3.

Exercice 2 :
Dans un plan affine réel, quel est l'ensemble des milieux des segments dont les extrémités appartiennent respectivement à deux segments donnés ?

Exercice 3 :
Soit ABC un triangle non plat dans un plan affine $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}$. Décrire à l'aide des coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C) les sept régions découpées par les droites qui portent les cotés du triangle ABC.

Exercice 4 :
Soit ABC un triangle non plat dans un plan affine $\mathcal{P}$ sur un corps k de caractéristique différente de 2. Montrer que si la caractéristique de k est différente de 3, alors les médianes de ABC sont concourantes. Que se passe-t-il si k est un corps de caractéristique 3 (on pourra regarder le cas du corps à 3 éléments) ?

Exercice 5 :
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine et A, B, C trois points non alignés. Soit $M_0 \in [AB]$. On note M_1 l'intersection de la droite parallèle à (BC) passant par M_0 avec (AC). On note M_2 l'intersection de la droite parallèle à (AB) passant par M_1 avec (BC). On continue (faire un dessin).
Montrer que $M_6 = M_0$.

Exercice 6 :
Soient $P_1, \ldots, P_n$ des points d'un plan affine réel $\mathcal{E}$.
Pour tout i, on note P_i^1 le milieu du segment $[P_i P_{i+1}]$ (par convention, $P_{n+1} = P_1$) : le polygone de sommets $(P_i^1)_{1 \leq i \leq n}$ est appelé polygone des milieux du polygone initial de sommets $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$.
On recommence : pour tout $m \geq 1$, pour tout i, on note P_i^{m+1} le milieu du segment $[P_i^m P_{i+1}^m]$.

a) Que peut-on dire de la suite des points $(P_i^m)_{m \in \mathbb{N}}$?
b) Un polygone donné $\mathcal{P}$ est-il-toujours le polygone des milieux d'un autre polygone $\mathcal{Q}$? Si non, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{Q}$ existe, et, le cas échéant, expliquer comment construire ce polygone $\mathcal{Q}$.

Exercice 7 : Le but de cet exercice est de démontrer le "théorème fondamental de la géométrie affine" (voir ci-dessous).
On rappelle d'abord quelques définitions. Si K et L sont des corps, E un K-espace vectoriel et F un L-espace vectoriel, une application $\phi : E \to F$ est dite semi-linéaire s'il existe $\sigma : K \to L$ un morphisme de corps tel que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in K$, $\phi(x + \lambda y) = \phi(x) + \sigma(\lambda)\phi(y)$ (on dit alors que ϕ est σ-linéaire). Avec les mêmes notations, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces affines de directions respectives E et F, une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dire semi-affine s'il existe une application semi-linéaire $\phi : E \to F$ telle que pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, on ait $f(B) = f(A) + \phi(\overrightarrow{AB})$.
On va montrer le théorème suivant : soient K, L deux corps et $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des espaces affines de même dimension $n \geq 2$ sur K et L respectivement. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une bijection. Alors

— si $K \neq \mathbb{F}_2$, f est semi-affine si et seulement si f préserve l'alignement.
— si $K = \mathbb{F}_2$, f est semi-affine si et seulement si f envoie toute paire de droites parallèles sur une paire de droites parallèles.

a) Vérifier le sens facile du théorème.
b) Montrer que pour la réciproque, toutes les hypothèses sont nécessaires ($n \geq 2$, f bijective, cas $K = \mathbb{F}_2$).
c) On suppose $K \neq \mathbb{F}_2$. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ préservant l'alignement.
   i) Montrer que pour tous points $A_0, \ldots, A_m \in \mathcal{E}$, $f(\mathrm{Aff} < A_0, \ldots, A_m >) \subset \mathrm{Aff} < f(A_0), \ldots, f(A_m) >$. Ce résultat est-il vrai si $K = \mathbb{F}_2$?
   ii) Montrer que l'image par f d'une famille de points affinement indépendants est une famille de points affinement indépendants.
   iii) Montrer que l'image par f d'une droite est une droite.
   iv) Montrer que l'image par f d'un plan est un plan.
   v) Montrer que deux droites parallèles sont envoyées par f sur deux droites parallèles.
d) Désormais K est quelconque et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ préserve l'alignement et envoie droites parallèles sur droites parallèles. On fixe un point $O \in \mathcal{E}$ et on note $O' := f(O)$. On définit l'application $\overrightarrow{f} : E \to F$ par $\overrightarrow{f}(u) := \overrightarrow{f(O)f(O+u)}$.
   i) Vérifier qu'il suffit de montrer que $\overrightarrow{f}$ est semi-linéaire.
   ii) Montrer que $\overrightarrow{f}$ est additive au sens suivant : pour tous vecteurs $u, v \in E$ linéairement indépendants, $\overrightarrow{f}(u + v) = \overrightarrow{f}(u) + \overrightarrow{f}(v)$.
   iii) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe une bijection $\sigma_x : K \to L$ telle que pour tout $\lambda \in K$, $\overrightarrow{f}(\lambda x) = \sigma_x(\lambda)\overrightarrow{f}(x)$.
   iv) En utilisant un vecteur $y \in E \setminus Kx$, montrer que σ_x est un morphisme de corps.
   v) Montrer que $\sigma_x = \sigma$ ne dépend pas du choix de x .
   vi) Conclure la preuve du théorème.
e) Montrer que si $K = L = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, alors toute application semi-affine est affine (i.e. $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$).
f) Si $K = L = \mathbb{C}$, décrire les bijections *continues* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ préservant l'alignement. Sont-elles toutes affines ?
g) Lister les bijections préservant l'alignement pour les corps finis suivants : $K = \mathbb{F}_2$, $K = \mathbb{F}_p$ (p premier impair), $K = \mathbb{F}_4$ (corps à 4 éléments), $K = \mathbb{F}_{p^n}$...