

Algèbre géométrique - TD3 Convexité

Exercice 1 :

- Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que tout élément de $\text{Conv}(X)$ est barycentre à coefficients positifs d'au plus $n + 1$ points de X .
- En déduire que l'enveloppe convexe d'un compact de \mathbb{R}^n est compacte.
- L'enveloppe convexe d'un fermé de \mathbb{R}^n est-elle fermée ?

Exercice 2 :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Exercice 3 :

- Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe borné contenant 0 dans son intérieur. On définit $\rho_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ par $\rho_C(x) := \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}$.
 - Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $\rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$.
 - Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) \leq 1\}$.
 - Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\rho_C(x + y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$.
 - Montrer que ρ_C est continue.
 - Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) = 1\} = \partial C$, que $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) < 1\} = \text{Int}(C)$ et que $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) \leq 1\} = \overline{C}$.
 - Montrer que l'application $x \mapsto \frac{\rho_C(x)}{\|x\|}x$ définit un homéomorphisme de \mathbb{R}^n identifiant l'intérieur de C avec la boule unité ouverte et la frontière de C avec la sphère unité.
- À quelle condition un convexe compact est-il homéomorphe à la boule unité fermée ?

Exercice 4 :

On munit $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée à la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , et on note $\mathfrak{B} \subset \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ la boule unité fermée.

- Décrire les points extrémaux de \mathfrak{B} (on pourra utiliser la décomposition polaire).
- En déduire l'enveloppe convexe du groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une matrice réelle de taille $n \times n$ est bistochastique si ses coefficients $(a_{i,j})$ sont positifs ou nuls et si l'on a pour tout i

$$\sum_j a_{i,j} = 1$$

et pour tout j ,

$$\sum_i a_{i,j} = 1.$$

On note $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

- Montrer que $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R})$ est compact et convexe.
- Montrer que les matrices de permutation sont des points extrémaux de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R})$.
- Décrire les points extrémaux de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R})$.

- d) Conclure que tout élément de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme barycentre à coefficients positifs d'au plus $(n-1)^2 + 1$ matrices de permutation.

Exercice 6 :

L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : tout compact de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide est contenu dans un unique ellipsoïde (centré en 0) de volume minimal.

On note \mathcal{Q} (resp. \mathcal{Q}_+ , resp. \mathcal{Q}_{++}) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, resp. définies positives) sur \mathbb{R}^n .

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide.

- a) On note V_0 le volume de la boule unité de \mathbb{R}^n . Soit $q \in \mathcal{Q}_{++}$ et \mathcal{E}_q l'ellipsoïde d'équation $q \leq 1$ défini par q . Montrer que

$$\text{Vol}(\mathcal{E}_q) = \frac{V_0}{\sqrt{\det(q)}}$$

où $\det(q)$ est le déterminant de la matrice de q dans une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

- b) Vérifier que l'application $N : q \mapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$ est une norme sur \mathcal{Q} .
 c) On note $C := \{q \in \mathcal{Q}_+ : \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$. Montrer que C est un convexe compact non vide de \mathcal{Q} .
 d) Montrer que l'application $\log \circ \det : \mathcal{Q}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement concave.
 e) Conclure.

Exercice 7 : On rappelle qu'un espace de Hilbert réel est un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est complet pour la topologie définie par la norme associée à ce produit scalaire. Soit H un espace de Hilbert réel. Soit C un convexe fermé non vide de H . Soit $x_0 \in H \setminus C$.

- a) Donner quelques exemples d'espaces de Hilbert réels.
 b) Montrer la formule du parallélogramme : pour tous $x, y \in H$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

- c) Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans C telle que, pour tout n , $d(x_0, y_n)^2 \leq d(x_0, C)^2 + \frac{1}{n}$.
 d) Montrer que la suite (y_n) est de Cauchy dans H .
 e) Montrer qu'il existe $y \in C$ tel que $d(x_0, y) = d(x_0, C)$.
 f) Montrer qu'un tel y est unique, et qu'il est sur la frontière ∂C de C . On le note $y = \pi_C(x_0)$.
 g) Montrer que le point $y \in C$ est caractérisé par les inégalités suivantes :

$$\forall z \in C, \langle y - x_0, y - z \rangle \leq 0.$$

- h) Montrer que l'application $\pi_C : H \setminus C \rightarrow \partial C$ est 1-lipschitzienne.
 i) On suppose dans cette question que H de dimension finie.
 i) On suppose C compact. Montrer que l'application π_C est surjective.
 ii) On ne suppose plus C compact. Montrer que π_C est surjective.
 iii) Montrer que par tout point de ∂C passe au moins un hyperplan d'appui de C .
 j) Montrer que tout sous-espace vectoriel fermé G de H vérifie que $\pi_G : H \rightarrow G$ est linéaire et que

$$H = G \oplus G^\perp.$$

- k) Montrer que l'hypothèse « G fermé » est nécessaire.