Algèbre géométrique - TD4
Actions de groupes et produits semi-directs

Exercice 1 : Soit G un groupe agissant sur lui même par translation à gauche : $g \cdot h = gh$.

a) Montrer que l'action est libre et transitive.

b) Réciproquement, soit X muni d'une action libre et transitive de G. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une unique bijection G-équivariante $f_x : X \to G$ telle que $f(x) = 1$ (une application $f : X \to X'$ entre ensembles muni d'une action d'un mme groupe G est dite équivariante si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$).

Exercice 2 :

a) Montrer que si G est un groupe fini et H un sous-groupe strict de G, alors la réunion des conjugués de H n'est pas égale à G tout entier. Que dire si le groupe G est infini et si H est d'indice fini dans G ? Et si on suppose seulement G infini ?

b) Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini X tel que $|X| \geq 2$. Montrer qu'il existe $g \in G$ ne fixant aucun point de X.

Exercice 3 : Soit K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie n. On note B l'ensemble des bases de V, $G = GL(V)$ et $X := \{\underline{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in V^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in B\}$.

a) Montrer que le groupe G agit naturellement sur les ensembles B et X.

b) Montrer que l'action de G sur B est libre et transitive.

c) Montrer que l'application naturelle $X \to K^n$ qui à $\underline{x}$ associe les coordonnées de x_{n+1} dans la base $(x_1, \ldots, x_n)$ est constante sur les G-orbites.

d) En déduire une description du quotient X/G.

e) On considère maintenant l'action de G sur $\mathrm{End}(V)$ par multiplication à gauche (resp. à droite). Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que deux endomorphismes de V soient dans la même orbite sous G.

Exercice 4 : Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. En considérant l'ensemble

$$E := \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\},$$

calculer le nombre moyen de point fixes d'un élément de G.
Que dire en particulier si l'action est transitive ?

Exercice 5 : Soit G un groupe.

a) On suppose que G est fini et on note p le plus petit nombre premier divisant le cardinal de G. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

b) On suppose que G est infini et qu'il admet un sous-groupe strict H d'indice fini. Montrer que G n'est pas un groupe simple (i.e. G admet un sous-groupe distingué non trivial).

Exercice 6 : Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes finis admettant exactement n classes de conjugaison.

Exercice 7 : Soit G un groupe, N un sous-groupe distingué de G, H un sous-groupe de G. On suppose que $G = N \rtimes H$. Soit $g \in G$ et $H' = gHg^{-1}$. Montrer que $G = N \rtimes H'$.

Exercice 8 : Soit G un groupe, N un sous-groupe distingué de G, H un sous-groupe de G tels que $G = N \rtimes H$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) H est un sous-groupe distingué de G.

b) Pour tout $(h,n) \in H \times N$, $hn = nh$.

c) $G = N \times H$ (le produit est direct).

Exercice 9 : Soit $n \geq 2$. Soit $\mu_n = \{x \in \mathbb{C}; x^n = 1\}$. On regarde $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et on note D_n le groupe des applications $\mathbb{R}$-linéaires inversibles f de $\mathbb{C}$ tels que $f(\mu_n) = \mu_n$.

a) Construire une suite exacte $1 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to D_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$.

b) Vérifier que cette suite exacte est scindée.

c) Décrire D_n comme un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (on explicitera ϕ).

Exercice 10 : Soit K un corps, et $n \geq 1$. On considère la suite exacte :

$$1 \to \mathrm{SL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K) \stackrel{\det}{\to} K^\times \to 1$$

a) Justifier l'exactitude de la suite.

b) Montrer que la suite exacte et scindée, et en déduire une description de $\mathrm{GL}_n(K)$ en tant que produit semi-direct.

c) A quelle condition sur K et n $\mathrm{GL}_n(K)$ s'identifie-t-il au produit direct de $\mathrm{SL}_n(K)$ et d'un sous-groupe H de $\mathrm{GL}_n(K)$?