Algèbre géométrique - TD5

Exercice 1 : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps k, de direction E. Soit G le groupe des homothéties-translations de $\mathcal{E}$.

a) Donner une suite exacte $1 \to E \to G \to k^\times \to 1$.

b) Vérifier qu'elle est scindée.

c) Décrire G comme un produit semi-direct.

Exercice 2 : Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, muni d'une forme quadratique $q : V \to k$. Un sous-espace vectoriel $H \subset V$ est dit totalement isotrope si $q(x) = 0$ pour tout $x \in H$.

a) Montrer que tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux ont la même dimension (si A et B sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux, on pourra considérer des supplémentaires A' et B' de $A \cap B$ dans A et B respectivement, et montrer que $A + (A'^{\perp} \cap B')$ est totalement isotrope).

b) Que vaut cette dimension quand $k = \mathbb{R}$ et q est de signature (p, r) ?

Exercice 3 : Soient V un k-espace vectoriel, muni d'une base $\mathcal{B}$ et soient q_1, q_2 deux formes quadratiques sur V. On suppose q_1 non dégénérée. Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_1)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_2)$.
Montrer que q_1 et q_2 sont réductibles dans une même base si et seulement si $A^{-1}B$ est diagonalisable.

Exercice 4 : Soit $\mathbb{H}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $1, i, j, k$, muni de la loi de multiplication

$$(a1+bi+cj+dk)\cdot(e1+fi+gj+hk) = (ae-bf-cg-dh)1+(ae+bf+ch-dg)i+(ag+ce-bh+df)j+(ah+ed+bg-cf)k,$$

qui en fait une $\mathbb{R}$-algèbre associative (les quaternions). On note $\mathbb{H}^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{H}$.
Si $z = a1 + bi + cj + dk$, on note $\bar{z} = a1 - bi - cj - dk$.
On munit $\mathbb{H}$ de la norme euclidienne $\|a1 + bi + cj + dk\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. On note S la sphère unité de $\mathbb{H}$
On note $\mathbb{H}_0$ le sous-espace vectoriel engendré par i, j et k.

a) Vérifier que $\overline{zz'} = \overline{z'}\bar{z}$.

b) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{H}$, $z\bar{z} = \bar{z}z = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)1$. En déduire que $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} - \{0\}$ et une expression pour z^{-1}.

c) Montrer que S est un sous-groupe de $\mathbb{H}^\times$.

d) Pour $q \in S$, on note $\iota_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ défini par $\iota_q(h) = qhq^{-1}$. Montrer que ι_q est une isométrie directe de $\mathbb{H}$, qui stabilise $\mathbb{H}_0$.

e) Montrer que l'application $\iota : S \to SO(\mathbb{H}_0)$, définie par $\iota(q) = \iota_{q|\mathbb{H}_0}$ est un morphisme de groupe, et en déterminer le noyau.

Exercice 5 : Soit G un sous-groupe fini de $SO(3, \mathbb{R})$. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, $T = S/G$ et $\pi : S \to T$ la projection canonique. Si $t = \pi(x)$, on note $s(t)$ le cardinal du stabilisateur de x et $c(t)$ le cardinal de l'orbite de x.

a) Montrer que $2|G| - 2 = \sum_{t \in T}(s(t) - 1)c(t)$.

b) Discuter valeurs possibles pour $s(t)$ et $|G|$.