Algèbre géométrique - TD6
Géométrie du triangle

Exercice 1 : Soient $\mathcal{P}$ un plan euclidien, et A, B, C trois points distincts de $\mathcal{P}$. Soit I le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon AI. Montrer que ABC est un triangle rectangle en C si et seulement si $C \in \mathcal{C}$.

Exercice 2 : Soient $\mathcal{P}$ un plan euclidien, $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r. Soit B un point à l'exterieur du cercle (c'est-à-dire $OB > r$). Montrer qu'il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par B.
Construire les points de tangence à la règle et au compas.

Exercice 3 : Soit ABC un triangle dans un plan euclidien $\mathcal{P}$. Soit G le centre de gravité de ABC, O le centre du cercle circonscrit de ABC et H l'orthocentre de ABC. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -2. On note $A' = h(A)$, $B' = h(B)$ et $C' = h(C)$.

a) Montrer que A est le milieu de $B'C'$.

b) Montrer que les médiatrices de $A'B'C'$ coincident avec les hauteurs de ABC.

c) En déduire que $h(O) = H$ et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Exercice 4 : Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Soit ABC un triangle de $\mathcal{P}$, d'orthocentre H. Montrer que le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite (AB) appartient au cercle circonscrit à ABC.

Exercice 5 : Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Soit ABC un triangle de $\mathcal{P}$ dont les angles sont tous aigus. Soient P un point du segment (BC), Q un point de la droite (AC) et R un point de la droite (AB). On note Q_1 le symétrique orthogonal de P par rapport à (AC) et R_1 le symétrique orthogonal de P par rapport à (AB).

a) Montrer que $PQ + QR + RP \geq Q_1R_1 = 2AP|\sin(\widehat{BAC})|$.

b) Montrer que le périmètre de PQR est minimal quand P, Q et R sont les pieds des trois hauteurs du triangle ABC.

Exercice 6 : Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Soit ABC un triangle non rectangle de $\mathcal{P}$, d'orthocentre H et de cercle circonscrit $\mathcal{C}$. Soit O le centre de $\mathcal{C}$.

a) Montrer que $\widehat{BAH} = \widehat{OAC} \mod \pi$.

b) Soit J le projeté orthogonal de B sur (AC) et K le projeté orthogonal de C sur (AB). Montrer que la droite JK est parallèle à la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Exercice 7 : Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Soient ABC un triangle non rectangle de $\mathcal{P}$. Soient p la projection orthogonale sur (BC), q la projection orthogonale sur (AC) et r la projection orthogonale sur (AB).
Soient $I = p(A), J = q(B), K = r(C)$ et $M = q(I), N = r(I), P = r(J), Q = p(J), R = p(K), S = q(K)$.

a) Montrer que (BC) et (PS) sont parallèles.

b) Montrer que M, N, P, Q, R et S sont cocycliques.