Algèbre géométrique - TD9
Quadriques projectives, quadriques affines

Exercice 1 :
Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et $Q \subset \mathbb{P}^3(K)$ la quadrique définie par $X_0X_3 - X_1X_2 = 0$.

a) Montrer que l'application $([a : b], [c : d]) \mapsto [ac : ad : bc : bd]$ définit une bijection de $\mathbb{P}^1(K) \times \mathbb{P}^1(K)$ sur Q.

b) En déduire que Q est la réunion disjointe d'une famille de droites projectives (et qu'il existe même deux telles familles, sans droite en commun). On dit que Q est une surface réglée.

c) Montrer que toute quadrique propre dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est réunion disjointe d'une (et même de deux) famille de droites projectives. Est-ce vrai sur un corps quelconque ?

Exercice 2 :
Soit K un corps de caractéristique différente de 2

a) Monter que par $\frac{n(n+3)}{2}$ points dans $\mathbb{P}^n(K)$ passe au moins une quadrique. À quelle condition celle-ci est-elle unique ?

b) Soient d_1, d_2, d_3 trois droites de $\mathbb{P}^3(K)$. Montrer qu'il existe une quadrique qui les contient, et que cette quadrique est en général unique.

Exercice 3 :
Combien y a-t-il de quadriques projectives dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ à homographie près ? En donner la liste complète.
Mêmes questions dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

Exercice 4 :
Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(V)$ une conique non dégénérée dans un plan projectif sur K. Soit $P \in \mathcal{C}$.

a) Construire une bijection π_P entre $\mathcal{C}$ et la droite projective $P^* \subset \mathbb{P}(V^*)$. Construire également une bijection entre $\mathcal{C}$ et une droite projective quelconque de $\mathbb{P}(V)$ ne contenant pas P.

b) Soit $Q \in \mathcal{C}$. Montrer que $\pi_Q \circ \pi_P^{-1} : P^* \to Q^*$ est une homographie.

c) En choisissant un repère projectif adapté, expliciter la bijection π_P en coordonnées.

d) En déduire une description explicite de tous les points de $\mathcal{C}$.

e) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante (problème des triplets pythagoriciens)

$$x^2 + y^2 = z^2 .$$

Exercice 5 :
Soit $\mathcal{C}$ une conique non dégénérée dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$.

a) Soit $P \in \mathcal{C}$. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ quatre points distincts. En utilisant le point P, proposer une définition du birapport $[A, B, C, D] \in \mathbb{P}^1(K)$.

b) Montrer que la définition précédente ne dépend pas du point P choisi.

c) En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Pascal.

Exercice 6 :
Soit ABC un triangle dans un plan projectif.

a) On suppose que les trois côtés (BC), (CA) et (AB) sont tangents à une conique $\mathcal{C}$ non dégénérée en trois points (respectivement) A', B' et C'.
   i) Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
   ii) Montrer que $(AB) \cap (A'B')$, $(AC) \cap (A'C')$ et $(BC) \cap (B'C')$ sont alignés.

b) Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ tels que (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes. Montrer qu'il existe une conique projective $\mathcal{C}$ tangente aux droites (AB), (BC) et (AC) en les points C', A' et B' respectivement.

Exercice 7 :
Deux triangles ABC et DEF d'un plan projectif ont leurs côtés tangents à une conique non dégénérée $\mathcal{C}$. Montrer que les six points A, B, C, D, E et F sont sur une même conique $\mathcal{C}'$.

Exercice 8 :
Soient cinq droites d'un plan projectif en position générale (à préciser). Montrer qu'il existe une unique conique $\mathcal{C}$ tangente à ces cinq droites.

Exercice 9 :
Soient a, b, c, d et e cinq points distincts d'un plan projectif tels que quatre d'entre eux ne sont jamais alignés. Construire à la règle non graduée un sixième point f de l'unique conique $\mathcal{C}$ passant par a, b, c, d et e.

Exercice 10 :
Soit K un corps, $\mathcal{C}$ une conique non dégénérée et $P, Q, R \in \mathcal{C}$ trois points distincts. On note $\widetilde{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \backslash \{P\}$, $\overline{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \setminus \{P, Q\}$ et Δ la tangente à $\mathcal{C}$ en P.

a) Pour tous points $A, B \in \widetilde{\mathcal{C}}$ distincts, on note S l'intersection de (AB) avec Δ et $A \oplus B$ le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec (QS) autre que Q si celui-ci existe. Vérifier que la définition de $A \oplus B$ s'étend au cas où $A = B$, ainsi qu'au cas où $(QS) \cap \mathcal{C} = \{Q\}$.

b) Montrer que $(\widetilde{\mathcal{C}}, \oplus)$ est un groupe abélien, isomorphe à $(K, +)$.

c) Pour tous points $A, B \in \overline{\mathcal{C}}$ distincts, on note S l'intersection de (AB) avec (PQ) et $A \otimes B$ le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec (RS) autre que R si celui-ci existe. Vérifier que la définition de $A \otimes B$ s'étend au cas où $A = B$, ainsi qu'au cas où $(RS) \cap \mathcal{C} = \{R\}$.

d) Montrer que $(\overline{\mathcal{C}}, \otimes)$ est un groupe abélien, isomorphe à $(K^*, \times)$.

e) Montrer que l'ensemble des solutions entières ($x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{Z}$) de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - dy^2 = 1$ est soit un singleton, soit naturellement un groupe abélien libre de rang 1 (i.e. isomorphe à $\mathbb{Z}$) : toutes les solutions s'obtiennent à partir d'une solution minimale par une méthode que l'on explicitera.

Exercice 11 :

a) Montrer qu'une quadrique projective (dans un espace projectif de dimension ≥ 2) sur un corps fini est non vide.

b) Calculer le nombre de points d'une conique projective non dégénérée sur $\mathbb{F}_q$.

c) Quelle est la classification des coniques projectives sur un corps fini ?

d) Et la classification des quadriques non dégénérées dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{F}_q)$? On précisera le nombre de points de ces quadriques.

Exercice 12 :
Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, Q une forme quadratique non dégénérée sur V, ϕ sa forme polaire et $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(V)$ la conique projective définie par Q. Soient p, q deux points distincts de $\mathcal{C}$ et v, w des vecteurs non nuls dont les images dans $\mathbb{P}(V)$ sont p et q. On note P le plan vectoriel engendré par v et w et $P^\perp$ son orthogonal pour ϕ.

a) Quelle est la dimension de $P^\perp$.

b) Montrer que le réel $a := \phi(v, w)$ est non nul, puis que la restriction ϕ_P de ϕ à P est non dégénérée.

c) Soit $u \in P^\perp \setminus \{0\}$. Montrer que (u, v, w) est une base de V et que la matrice de Q dans cette base est $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

On remplace désormais Q par $Q' = -\lambda^{-1}Q$, on pose $w' = \dfrac{-\lambda}{2a}w$ et on note (X, Y, Z) les coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (u, v, w')$.

d) Écrire la matrice de Q' dans la base $\mathcal{B}$ et exprimer $Q'(X, Y, Z)$ en fonction de X, Y, Z.

e) On prend comme droite à l'infini la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $Z = 0$ et l'on identifie $\mathbb{P}(V) \setminus \mathcal{D}_1$ à l'hyperplan affine $\mathcal{H}_1$ de V d'équation $Z = 1$. Écrire l'équation de la conique affine $\mathcal{C}_1 := \{(x, y, 1) \mid Q'(x, y, 1) = 0\}$ et déterminer sa nature.

f) Même question en prenant comme droite à l'infini la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $X = 0$ et en identifiant $\mathbb{P}(V) \setminus \mathcal{D}_2$ à l'hyperplan affine $\mathcal{H}_2$ de V d'équation $X = 1$.

g) Même question en prenant comme droite à l'infini la droite $\mathcal{D}_3$ d'équation $Y + Z = 0$ et en identifiant $\mathbb{P}(V) \setminus \mathcal{D}_3$ à l'hyperplan affine $\mathcal{H}_3$ de V d'équation $Y + Z = 1$.

Exercice 13 :
Soit $\mathcal{C}$ une conique propre d'un plan affine euclidien. Décrire le groupe des isométries qui préservent $\mathcal{C}$.

Exercice 14 :
Soit $\mathbb{P}(V)$ un espace projectif et $\mathcal{E} := \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)$ un espace affine, complémentaire d'un hyperplan projectif $\mathbb{P}(H)$ de $\mathbb{P}(V)$. Soit $Q \subset \mathbb{P}(V)$ une quadrique projective non dégénérée.
Montrer que $\widetilde{Q} := Q \cap \mathcal{E}$ est une quadrique affine, et que le centre de $\widetilde{Q}$ est le pôle de l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}(H)$ par rapport à Q.

Exercice 15 :
Combien y a-t-il de quadriques affines dans $\mathbb{R}^3$? Donner la liste complète, dessiner chacune d'entre elles et affecter aux différents cas les noms suivants :
plan double réel, couple de plans imaginaires conjugués, couple de plans réels, couple de plans imaginaires conjugués parallèles distincts, couple de plans réels parallèles distincts, cylindre à base parabolique, cylindre à base hyperbolique, cylindre à base elliptique, cylindre imaginaire, cône imaginaire de sommet réel, cône de base une conique propre réelle, ellipsoïde imaginaire, ellipsoïde réel, paraboloïde hyperbolique, paraboloïde elliptique, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes.

Exercice 16 :
Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, V un K-espace vectoriel de dimension n, Q une forme quadratique non dégénérée sur V et ϕ sa forme polaire.

a) Si $\dim(E) = d$, quelle est la dimension de $E^\perp$? Et que peut-on dire de $(E^\perp)^\perp$?

b) Montrer que le noyau $N(Q_E)$ est égal à $E \cap E^\perp$.

c) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) Q_E est non dégénérée ; (b) $V = E \oplus E^\perp$. De plus, sous ces conditions, montrer que $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

   On dit qu'un sous-espace vectoriel F de V est *anisotrope* s'il ne contient aucun vecteur isotrope non nul. On suppose que V n'est *pas* anisotrope.

d) Soit u un vecteur isotrope non nul. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope v tel que $\phi(u, v) = 1$.

e) Soit P le plan vectoriel engendré par u et v. Montrer que Q_P est non dégénérée. On dira que P est un plan *hyperbolique* et que (u, v) en est une base hyperbolique.

f) Montrer que V est somme directe orthogonale de plans hyperboliques $P = P_1, \ldots, P_r$ (pour un entier $r \geq 1$) et d'un sous-espace anisotrope F.

g) Soit F un sous-espace vectoriel de V de dimension 2. Montrer que F est un plan hyperbolique si et seulement si il possède une base orthogonale (e_1, e_2) telle que $Q(e_1) = 1 = -Q(e_2)$.

   On suppose que $K = \mathbb{R}$.

h) Supposons que V soit somme directe orthogonale de r plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive. Déterminer alors la signature (p, q) de Q.

i) Réciproquement, si Q est de signature (p, q), avec $p \geq q > 0$, montrer que V est la somme directe orthogonale de r plans hyperboliques et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive, pour des entiers $r > 0$ et $f \geq 0$ que l'on exprimera en fonction de p et q.