Devoir No. 1 du 13 octobre 2017
À rendre le 20 octobre 2017

Exercice 1. Soit W un espace vectoriel de dimension finie et $V \subseteq W$ un sous-espace.

L'on rappelle que l'espace vectoriel quotient W/V est le quotient de W par la relation d'équivalence $v \sim v' \Leftrightarrow v - v' \in V$. Ainsi, les éléments de W/V sont les sous-espaces affines de W dirigés par V. L'on note $v + V = [v]$ la classe d'équivalence d'un élément $v \in W$, ou encore le sous-espace affine dirigé par V et passant par v.

L'on note $i : V \to W$ l'inclusion et $p : W \to W/V$ la projection, de sorte que l'on a une suite exacte courte d'espaces vectoriels et applications linéaires

$$0 \to V \xrightarrow{i} W \xrightarrow{p} W/V \to 0,$$

c'est-à-dire i est injective, $\ker p = \operatorname{im} i$ *et p est surjective.*

Une section de p *est une application linéaire $s : W/V \to W$ telle que*

$$p \circ s = \mathrm{Id}_{W/V}.$$

On note $\mathcal{S}ec$ l'ensemble des sections de p.

Un supplémentaire de V dans W *est un sous-espace vectoriel $V' \subseteq W$ tel que $W = V \oplus V'$, ou encore $W = V + V'$ et $V \cap V' = \{0\}$. On note $\mathcal{S}upp$ l'ensemble des supplémentaires de V.*

(i) Montrer que le choix d'une section s équivaut au choix d'un supplémentaire V' de V de la manière suivante : étant donnée s, l'on définit un supplémentaire $V' = \operatorname{im} s$. Inversement, étant donné un supplémentaire V', l'on définit $s([v])$ comme étant l'unique (!) point d'intersection $V' \cap (v + V)$.

(ii) Soit V' un supplémentaire fixé. Montrer que $\mathcal{S}upp$ s'identifie à l'espace vectoriel $L(V', V)$ de la manière suivante : à toute application linéaire de V' dans V on associe son graphe. Ceci détermine une structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{S}upp$, et en particulier une structure d'espace affine.

(iii) Montrer que $\mathcal{S}ec$ est un espace affine dirigé par $L(W/V, V)$.

(iv) Montrer que la bijection du point (i) est un isomorphisme d'espaces affines.

(v) En déduire que la structure d'espace affine sur $\mathcal{S}upp$ donnée au point (ii) ne dépend pas du choix de V'. Démontrer cette dernière affirmation directement à partir de la définition.

Exercice 2. (autour du théorème des "6 zig-zags")

(i) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ un repère affine dans $\mathcal{E}$. Soient $P_0, \ldots, P_n$ des points quelconques de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe une unique application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\varphi(A_i) = P_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.

(ii) Soient A, B, C trois points deux à deux distincts et non alignés dans un plan affine $\mathcal{E}$. Montrer que l'unique transformation affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = C$, $\varphi(C) = B$ est une symétrie par rapport à une droite affine d parallèlement à une droite vectorielle V. Décrire d et V. Montrer que, pour tout point P sur la droite (BA), l'image de P par φ est le point d'intersection avec (AC) de la droite parallèle à (CB) passant par P.

(iii) Utiliser les deux questions précédentes pour démontrer le théorème des "6 zig-zags": étant donné un triangle (ABC) dans un plan affine et un point $P = P_0$ différent de A et B situé sur la droite (BA), l'on construit des points $P_1, P_2, \ldots, P_6$ de la manière suivante : P_1 est le point sur (AC) tel que (P_0P_1) est parallèle à (CB), P_2 est le point sur (CB) tel que (P_1P_2) est parallèle à (BA), P_3 est le point sur (BA) tel que (P_2P_3) est parallèle à (AC) etc. Alors $P_6 = P_0$.

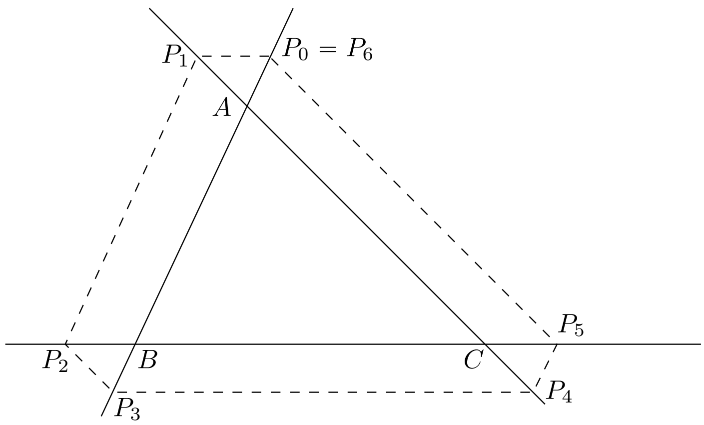

Figure 1: Le zig-zag se referme.