Université Pierre et Marie Curie
Master 1 Mathématiques

4M001 2017-2018

E. Lepage, A. Oancea

Devoir No. 2 du 30 novembre 2017
À rendre le 7 décembre 2017

Exercice 1.

PRÉLIMINAIRES

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien, de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites de $\mathcal{P}$, on note $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ l'angle (défini modulo π) entre ces deux droites. Si P est un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{D}$ est une droite vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, on note $P + \overrightarrow{D}$ la droite affine passant par P de direction $\overrightarrow{D}$.

Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{P}$. Il existe un unique cercle passant par A, B et C que l'on note $\mathcal{C}$. Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Si M est un point de $\mathcal{C}$, on note $T_M\mathcal{C}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en M. Deux points M_1 et M_2 de $\mathcal{C}$ sont dits diamétralement opposés *sur $\mathcal{C}$ si $O \in (M_1M_2)$.*

Soient p, q et r les projections orthogonales sur (AB), (AC) et (BC) respectivement. Si M est un point de $\mathcal{C}$, les points $p(M)$, $q(M)$ et $r(M)$ sont alignés sur une même droite $\mathcal{D}_M$, appelée la droite de Simson de M.

Le but de l'exercice est de montrer que deux points $M, M' \in \mathcal{C}$ ont des droites de Simson orthogonales $\mathcal{D}_M \perp \mathcal{D}_{M'}$ si et seulement si ils sont diamétralement opposés.

Soit $\mathcal{D}$ la parallèle à (BC) passant par le point O et s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

Soit M un point de $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{D}_M^1 = (As(M))$ si $A \neq s(M)$ et $\mathcal{D}_M^1 = T_A\mathcal{C}$ si $A = s(M)$. On note $\mathcal{D}_M^2$ la droite orthogonale à (BC) passant par M.

1. (a) Montrer que $s(M) \in \mathcal{C}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{D}_M^2$ est la droite passant par M et $s(M)$ si $M \neq s(M)$ et est la tangente à $\mathcal{C}$ passant par M si $M = s(M)$.
   (c) On suppose que $M \neq C$.
      i. Montrer que $(\mathcal{D}_M^1, \mathcal{D}_M^2) = ((AC), (MC))$.
      ii. Montrer que les points $M, C, q(M)$ et $r(M)$ sont cocycliques.
      iii. Montrer que $(\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_M^2) = ((AC), (MC))$.
      iv. Montrer que $\mathcal{D}_M$ et $\mathcal{D}_M^1$ sont parallèles.
   (d) Montrer que, si $M = C$, $\mathcal{D}_M$ et $\mathcal{D}_M^1$ sont aussi parallèles.

2. (a) Soit P un point de $\mathcal{C}$ et d une droite passant par P. Montrer que si $d \neq T_P\mathcal{C}$, alors d intersecte $\mathcal{C}$ en un unique point P' distinct de P. On note $f_P(d) := P'$. Si $d = T_P\mathcal{C}$, on note $f_P(d) = P$.
   (b) Montrer que l'application f_P réalise une bijection entre l'ensemble des droites passant par P et le cercle $\mathcal{C}$.
   (c) Soit $\overrightarrow{D}$ une droite vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Montrer qu'il existe un unique point M de $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{D}_M$ ait pour direction $\overrightarrow{D}$ et qu'alors $M = s(f_A(A + \overrightarrow{D}))$.

3. Soient M et M' deux points de $\mathcal{C}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{D}_M$ et $\mathcal{D}_{M'}$ sont orthogonales si et seulement si $s(M)$ et $s(M')$ sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.

   (b) En déduire que $\mathcal{D}_M$ et $\mathcal{D}_{M'}$ sont orthogonales si et seulement si M et M' sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Considérons la figure ci-dessous tracée dans un plan affine réel, dans laquelle les droites $d_4 = (CE)$ et $d_5 = (FG)$ sont parallèles. Redessiner cette figure après avoir envoyé à l'infini les droites d_1, d_4, respectivement (BE).

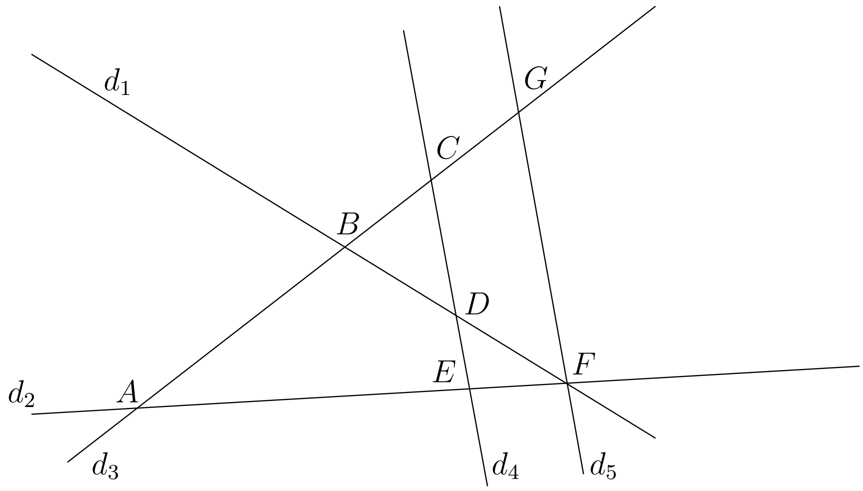

Figure 1: Une configuration de droites et de points dans un plan affine.