Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques 2017-2018

Cours de géométrie affine et projective 4M001
E. Lepage, A. Oancea

Examen final du 10 janvier 2018

Durée : 3 heures

Le clarté des explications sera appréciée. Sont autorisées les notes individuelles de cours et de TD, ainsi que les deux polycopiés du cours.

Exercice 1. (plongement vectoriel canonique d'un espace affine)

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et A un ensemble. L'ensemble des fonctions $f : A \to E$, noté $\mathcal{F}(A, E)$, porte une structure d'espace vectoriel définie par les opérations

$$f + g : a \mapsto f(a) + g(a), \qquad \lambda f : a \mapsto \lambda f(a), \qquad \forall a \in A,\ \lambda \in \mathbb{K},\ f, g \in \mathcal{F}(A, E).$$

1. Pour $v \in E$, on note $c_v : A \to E$ la fonction constante égale à v. Montrer que l'application $C : E \to \mathcal{F}(A, E)$, $v \mapsto c_v$ est linéaire et injective.

2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. Pour $A \in \mathcal{E}$, on note $f_A : \mathcal{E} \to E$ la fonction définie par

$$f_A(P) = \overrightarrow{PA}.$$

Montrer l'identité

$$f_B - f_A = c_{\overrightarrow{AB}}, \qquad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

3. Montrer que l'application

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}(\mathcal{E}, E), \qquad f(A) = f_A$$

est affine et injective de partie linéaire $\overrightarrow{f} = C$.

4. Soit $\hat{\mathcal{E}}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathcal{E}, E)$ engendré par les fonctions f_A, $A \in \mathcal{E}$ et c_v, $v \in E$. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'on a une décomposition en somme directe

$$\hat{\mathcal{E}} = C(E) \oplus \mathbb{K} f_A.$$

En déduire qu'il existe une unique application linéaire $\phi : \hat{\mathcal{E}} \to \mathbb{K}$ telle que $\phi(f_A) = 1$ et $\phi|_{C(E)} = 0$ et montrer que cette application linéaire ne dépend pas du choix de $A \in \mathcal{E}$.

5. Montrer que f réalise un isomorphisme d'espaces affines entre $\mathcal{E}$ et $\phi^{-1}(1)$. On l'appelle *plongement vectoriel canonique de l'espace affine* $\mathcal{E}$.

6. Montrer que tout élément de $\hat{\mathcal{E}} \backslash C(E)$ s'écrit de manière unique comme λf_A, avec $\lambda \in \mathbb{K}^\times$ et $A \in \mathcal{E}$. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^\times$ et $A, B \in \mathcal{E}$ montrer l'identité

$$\lambda f_A + \mu f_B = \begin{cases} (\lambda + \mu) f_G, \quad G = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} A + \frac{\mu}{\lambda+\mu} B, & \text{si } \lambda + \mu \neq 0, \\ \mu c_{\overrightarrow{AB}}, & \text{si } \lambda = -\mu, \end{cases}$$

Ici G désigne le barycentre des points pondérés $(A, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$ et $(B, \frac{\mu}{\lambda+\mu})$.

Exercice 2. (coniques) L'on munit $\mathbb{R}^2$ des coordonnées standard (x, y). L'on note

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y = x^2\}.$$

Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $a, b > 0$ l'on note

$$C_{x_0,y_0,a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\}.$$

1. (i) Soient $(x_0, y_0), (x'_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$ et $a, b, a', b' > 0$. Déterminer une transformation affine φ de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\varphi(C_{x_0,y_0,a,b}) = C_{x'_0,y'_0,a',b'}.$$

(ii) Existe-t-il une transformation affine φ telle que $\varphi(C_{0,0,1,1}) = P$?

2. L'on munit $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de coordonnées homogènes $[X : Y : Z]$ et l'on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\backslash\{Z = 0\}$ en associant au point (x, y) le point $[x : y : 1]$.

(i) Écrire l'équation de la conique projective $\mathcal{P}$ déterminée par la parabole P. Écrire l'équation de la conique projective $\mathcal{C}$ déterminée par le cercle $C_{0,0,1,1}$.

(ii) Déterminer une transformation projective Φ telle que $\Phi(\mathcal{C}) = \mathcal{P}$.

3. Considérons la conique $\mathcal{P}' = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \, : \, XZ - Y^2 = 0\}$.

(i) Montrer que les droites $\{X = 0\}$ et $\{Z = 0\}$ sont tangentes à $\mathcal{P}'$ et déterminer leur unique point d'intersection.

(ii) Déterminer une équation pour la conique affine déterminée par $\mathcal{P}'$ sur le complémentaire affine de la droite $\{X = 0\}$.

Exercice 3. (pinceaux d'hyperplans) Étant donné un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ on note $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ son dual. On rappelle que l'on a une identification canonique $V \simeq V^{**}$.

Pour tout sous-espace vectoriel $E \subset V$ on note $E^o = \{f \in V^* \, : \, f|_E = 0\} \subset V^*$. C'est un sous-espace vectoriel de V^* que l'on appelle *orthogonal* de E.

1. Montrer les assertions suivantes :

(i) $\dim E^o + \dim E = \dim V$.

(ii) $E^{oo} = E$.

(iii) $E \subset F$ si et seulement si $E^o \supset F^o$.

2. Considérons $\Delta = \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(V^*)$ une droite projective, de sorte que $F \subset V^*$ est un sous-espace de dimension 2. On note $W = F^o \subset V$.

(i) Quelle est la codimension de $\mathbb{P}(W)$ dans $\mathbb{P}(V)$?

(ii) Montrer que l'application qui associe à un point $[f] \in \Delta$ l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(\ker f)$ définit une bijection entre Δ et l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}(V)$ qui contiennent $\mathbb{P}(W)$.

3. L'on suppose maintenant que $\mathbb{P}(V)$ est de dimension 2. L'on associe à toute droite projective $\Sigma = \mathbb{P}(H)$ dans $\mathbb{P}(V)$ le point $\Sigma^* = \mathbb{P}(H^o)$ dans $\mathbb{P}(V^*)$ (dualité projective). Montrer que trois droites dans $\mathbb{P}(V)$ sont concourantes si et seulement si les points correspondants dans $\mathbb{P}(V^*)$ sont alignés.