Université Pierre et Marie Curie — Cours de géométrie affine et projective 4M001
M1 Mathématiques 2017-2018 — E. Lepage, A. Oancea

Examen partiel du 9 novembre 2017

Durée : 3 heures

Le clarté des explications sera appréciée. Sont autorisées les notes individuelles de cours et de TD, ainsi que les deux polycopiés du cours.

Exercice 1. Considérons trois points non-alignés A, B, C dans un plan affine $\mathcal{E}$ sur un corps k. Considérons trois points $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ différents des sommets du triangle ABC (Figure 1). L'on note $\alpha, \beta, \gamma \in k$ les scalaires tels que

$$\overrightarrow{A'B} = \alpha\overrightarrow{A'C}, \qquad \overrightarrow{B'C} = \beta\overrightarrow{B'A}, \qquad \overrightarrow{C'A} = \gamma\overrightarrow{C'B}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'énoncé suivant :

Théorème de Ceva. *Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\alpha\beta\gamma = -1$.*

I

1. Montrer que A, B, C forment un repère affine.

2. Soit $P \in \mathcal{E}$ un point quelconque. Montrer qu'il existe des scalaires uniquement déterminés $a, b, c \in k$ tels que $a + b + c = 1$ et $P = aA + bB + cC$, où cette dernière égalité est entendue au sens suivant : pour tout point $P' \in \mathcal{E}$ l'on a $\overrightarrow{PP'} = a\overrightarrow{AP'} + b\overrightarrow{BP'} + c\overrightarrow{CP'}$. L'on rappelle que ces scalaires sont appelés “coordonnées barycentriques” par rapport au repère affine (A, B, C).

3. Déterminer les coordonnées barycentriques des points A', B', C' par rapport au repère affine (A, B, C). Comment expliquez-vous le fait que, pour chacun de ces points, une et une seule de ses coordonnées barycentriques est nulle ?

II

4. Supposons que les droites (AA') et (BB') sont parallèles. Utiliser le théorème de Thalès pour montrer que la droite (CC') leur est parallèle si et seulement si $\alpha\beta\gamma = -1$.

III

Supposons que les droites (AA') et (BB') se rencontrent en un point P de coordonnées barycentriques (a, b, c).

5. Exprimer α et β en fonction de a, b, c (l'on pourra penser à la propriété d'associativité du barycentre).

6. Supposons que la droite (CC') passe par P. Exprimer alors γ en fonction de a, b, c et en déduire que $\alpha\beta\gamma = -1$.

7. Supposons $\alpha\beta\gamma = -1$. Exprimer alors γ en fonction de a, b, c et en déduire que P est barycentre de C et C' avec des poids que l'on indiquera. Conclure.

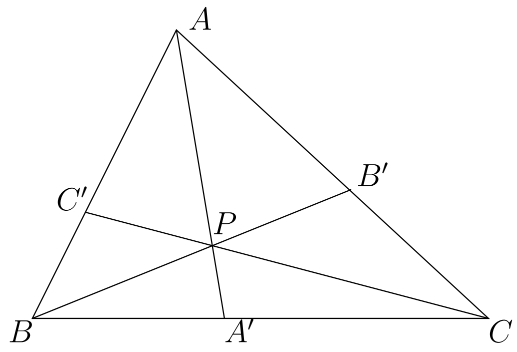

Figure 1: Configuration du théorème de Ceva.

Exercice 2. L'on rappelle les définitions suivantes.

Un espace vectoriel euclidien *est un couple* (E, b) *constitué d'un espace vectoriel réel de dimension finie et d'une forme bilinéaire symétrique définie positive* $b : E \times E \to \mathbb{R}$, *appelée aussi* produit scalaire.

Un espace affine euclidien *est un couple* $(\mathcal{E}, b)$ *constitué d'un espace affine réel de dimension finie* $\mathcal{E}$ *dirigé par un espace vectoriel euclidien* (E, b).

Un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens *est un transformation linéaire bijective qui préserve les produits scalaires.*

Un isomorphisme d'espaces affines euclidiens *est une transformation affine bijective dont la partie linéaire préserve les produits scalaires.*

Un isomorphisme d'un espace vectoriel ou affine euclidien sur lui-même est appelé isométrie.

Soit $\mathcal{E}$ *un espace affine réel. Une bijection affine* $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *est dite* positive *si le déterminant de sa partie linéaire est positif.*

Soit $\mathcal{E}$ *un espace affine. Une application* $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *est une* involution *si* $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

1.i. Montrer que deux espaces vectoriels euclidiens sont isomorphes si et seulement si ils sont de même dimension.

1.ii. Montrer que deux espaces affines euclidiens sont isomorphes si et seulement si ils sont de même dimension.

2.i. Soit (E, b) un plan vectoriel euclidien. Montrer que l'ensemble des isométries linéaires positives de E qui sont des involutions est égal à $\{\pm \mathrm{Id}_E\}$.

2.ii. Soit $(\mathcal{E}, b)$ un plan affine euclidien. Déterminer les isométries affines positives de $\mathcal{E}$ qui sont des involutions. Est-ce que celles-ci forment un sous-groupe du groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$?

3.i. Soit (E, b) un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Déterminer les isométries linéaires positives de $\mathcal{E}$ qui sont des involutions. Est-ce que celles-ci forment un sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$?

3.ii. Soit $(\mathcal{E}, b)$ un espace affine euclidien de dimension 3. Déterminer les isométries affines positives de $\mathcal{E}$ qui sont des involutions. Est-ce que celles-ci forment un sous-groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$?