Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques 2017-2018

Cours de géométrie affine et projective 4M001

E. Lepage, A. Oancea

Corrigé de l'examen partiel du 9 novembre 2017

Exercice 1. *Considérons trois points non-alignés A, B, C dans un plan affine $\mathcal{E}$ sur un corps k. Considérons trois points $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ différents des sommets du triangle ABC (Figure 2). L'on note $\alpha, \beta, \gamma \in k$ les scalaires tels que*

$$\overrightarrow{A'B} = \alpha \overrightarrow{A'C}, \qquad \overrightarrow{B'C} = \beta \overrightarrow{B'A}, \qquad \overrightarrow{C'A} = \gamma \overrightarrow{C'B}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'énoncé suivant :

Théorème de Ceva. *Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\alpha\beta\gamma = -1$.*

I

1. Montrer que A, B, C forment un repère affine.

Notons E la direction de $\mathcal{E}$. Par définition, trois points A, B, C forment un repère affine dans $\mathcal{E}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base de E. Puisque $\dim E = 2$, ceci équivaut à l'indépendance linéaire de ces deux vecteurs, qui est à son tour équivalente au fait que les points A, B, C ne sont pas alignés. L'on voit par ailleurs que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont aussi linéairement indépendants, de même que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

2. Soit $P \in \mathcal{E}$ un point quelconque. Montrer qu'il existe des scalaires uniquement déterminés $a, b, c \in k$ tels que $a + b + c = 1$ et $P = aA + bB + cC$, où cette dernière égalité est entendue au sens suivant : pour tout point $P' \in \mathcal{E}$ l'on a $\overrightarrow{PP'} = a\overrightarrow{AP'} + b\overrightarrow{BP'} + c\overrightarrow{CP'}$. L'on rappelle que ces scalaires sont appelés "coordonnées barycentriques" par rapport au repère affine (A, B, C).

Fixons un point $P \in \mathcal{E}$.

Montrons l'unicité des scalaires a, b, c comme ci-dessus. La condition $\overrightarrow{PP'} = a\overrightarrow{AP'} + b\overrightarrow{BP'} + c\overrightarrow{CP'}$ appliquée à $P = A$ entraîne $\overrightarrow{PA} = b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{CA}$, ou encore $\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$. Cette dernière condition détermine de façon unique b et c puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base de E. De la même manière l'on montre que a et b sont uniquement déterminés en écrivant la condition précédente à $P = C$.

Montrons l'existence des scalaires a, b, c comme ci-dessus. Il existe $b, c \in k$ tels que $\overrightarrow{PA} = b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{CA}$ et l'on pose $a = 1 - b - c$. Pour tout $P' \in \mathcal{E}$ l'on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PP'} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP'} \\
&= b\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP'} \\
&= b\overrightarrow{BP'} + c\overrightarrow{CP'} + b\overrightarrow{P'A} + c\overrightarrow{P'A} + \overrightarrow{AP'} \\
&= b\overrightarrow{BP'} + c\overrightarrow{CP'} + (1 - b - c)\overrightarrow{AP'} \\
&= a\overrightarrow{AP'} + b\overrightarrow{BP'} + c\overrightarrow{CP'}.
\end{aligned}$$

3. Déterminer les coordonnées barycentriques des points A', B', C' par rapport au repère affine (A, B, C). Comment expliquez-vous le fait que, pour chacun de ces points, une et une seule de ses coordonnées barycentriques est nulle ?

Le point C' est situé sur la droite (AB), par conséquent il est barycentre de A et B avec des poids appropriés $C' = a'A + b'B$, $a' + b' = 1$. Puisque $C' \neq A, B$, il s'ensuit que $a', b' \neq 1$, et aussi $a', b' \neq 0$. Lorsque l'on exprime le point C' en tant que barycentre de A, B, C comme $C' = a''A + b''B + c''C$, l'on aura nécessairement $a' = a''$, $b' = b''$ et $c'' = 0$. En effet, la relation $C' = a'A + b'B$ implique $\overrightarrow{C'A} = b'\overrightarrow{BA}$, alors que la relation $C' = a''A + b''B + c''C$ implique $\overrightarrow{C'A} = b''\overrightarrow{BA} + c''\overrightarrow{CA}$, ce qui entraîne $b' = b''$ et $c'' = 0$ puisque $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont linéairement indépendants ; de la même manière on obtient $a' = a$". Ceci montre qu'il suffit de calculer les coordonnées barycentriques de C' par rapport au repère B, C sur la droite (BC), et que exactement une des coordonnées barycentriques de C' par rapport au repère A, B, C dans $\mathcal{E}$ est nulle, à savoir la coordonnée sur le point C. L'annulation d'une et une seule des coordonnées barycentriques reflète le fait que le point C' est situé sur la droite engendrée par deux des points du repère, tout en étant différent de ces deux points.

Calculons donc a', b' tels que $C' = a'A + b'B$. Cette relation implique $\overrightarrow{C'A} = b'\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{C'B} = a'\overrightarrow{AB}$ avec $a', b' \neq 0$, de sorte que

$$\gamma = -\frac{b'}{a'}.$$

Avec $a' + b' = 1$ l'on obtient

$$a' = \frac{1}{1-\gamma}, \qquad b' = -\frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Ainsi

$$C' = \frac{1}{1-\gamma}A - \frac{\gamma}{1-\gamma}B + 0 \cdot C.$$

De la même manière l'on calcule les coordonnées barycentriques de A' et B' (formellement, les expressions s'obtiennent à partir de l'expression pour C' par permutations cycliques) :

$$A' = 0 \cdot A + \frac{1}{1-\alpha}B - \frac{\alpha}{1-\alpha}C,$$
$$B' = -\frac{\beta}{1-\beta}A + 0 \cdot B + \frac{1}{1-\beta}C.$$

II

4. Supposons que les droites (AA') et (BB') sont parallèles. Utiliser le théorème de Thalès pour montrer que la droite (CC') leur est parallèle si et seulement si $\alpha\beta\gamma = -1$.

Considérons la Figure 1. En appliquant le théorème de Thalès aux droites parallèles (AA') et (BB'), sécantes aux droites (BC) et (AC), l'on trouve

$$\frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{B'C}}.$$

Or

$$\frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'C}} = \frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{A'C}(1-\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha}$$

et
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{B'C}} = \frac{\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'C}} = \frac{\overrightarrow{B'C}(1-1/\beta)}{\overrightarrow{B'C}} = \frac{\beta-1}{\beta}.$$
Ainsi $1/(1-\alpha) = (\beta-1)/\beta$, ou encore
$$\alpha = \frac{1}{1-\beta} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\alpha-1}{\alpha},$$
de sorte que
$$\alpha\beta = \alpha - 1.$$

L'on applique maintenant le théorème de Thalès aux droites (AA') et (CC'), sécantes aux droites (BA) et (BC). Les droites (AA') et (CC') sont parallèles si et seulement si
$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC'}}.$$
Un calcul similaire au précédent montre que $\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ et $\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC'}} = 1-\gamma$. Ainsi les droites (AA') et (CC') sont parallèles si et seulement si $1-\gamma = \alpha/(\alpha-1)$, ou encore
$$\gamma = \frac{1}{1-\alpha}.$$
En vue de $\alpha\beta = \alpha - 1$, cette dernière condition est équivalente à $\alpha\beta\gamma = -1$.

III

Supposons que les droites (AA') et (BB') se rencontrent en un point P de coordonnées barycentriques (a, b, c).

5. Exprimer α et β en fonction de a, b, c (l'on pourra penser à la propriété d'associativité du barycentre).

L'on a
$$P = aA + bB + cC = aA + (b+c)\big(\frac{b}{b+c}B + \frac{c}{b+c}C\big).$$
Ceci exprime P comme barycentre de A et d'un point A'' situé sur la droite (BC), de coordonnées barycentriques $b/(b+c)$ et $c/(b+c)$ par rapport au repère B, C. Puisque tout barycentre d'un système de points appartient à l'espace affine engendré par ces mêmes points, il s'ensuit que $A'' = A'$: en effet, si $P \in (AA'')$ alors $A'' \in (AP)$, et puisque $A'' \in (BC)$ l'on a $A'' = A' = (AP) \cap (BC)$.

Les coordonnées barycentriques du point A' par rapport au repère affine B, C sur la droite (BC) sont donc $b/(b+c)$ et $c/(b+c)$. Le calcul de la question 3. montre que l'on a
$$\alpha = -\frac{c}{b}.$$
De la même manière l'on obtient
$$\beta = -\frac{a}{c}.$$

6. Supposons que la droite (CC') passe par P. Exprimer alors γ en fonction de a, b, c et en déduire que $\alpha\beta\gamma = -1$.

Si $P \in (CC')$ alors le même calcul que ci-dessus montre que

$$\gamma = -\frac{b}{a},$$

de sorte que $\alpha\beta\gamma = -1$.

7. Supposons $\alpha\beta\gamma = -1$. Exprimer alors γ en fonction de a, b, c et en déduire que P est barycentre de C et C' avec des poids que l'on indiquera. Conclure.

La condition $\alpha\beta\gamma = -1$ implique $\gamma = -\frac{b}{a}$. Le calcul de la question 3. montre alors que

$$C' = \frac{a}{a+b}A + \frac{b}{a+b}B.$$

Puisque $P = aA + bB + cC$ implique $P = (a+b)\big(\frac{a}{a+b}A + \frac{b}{a+b}B\big) + cC$, il s'ensuit que P est barycentre de C et C':

$$P = (a+b)C' + cC.$$

En particulier P appartient à la droite (CC'), ce qui montre que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes. Ceci achève la démonstration du théorème de Ceva.

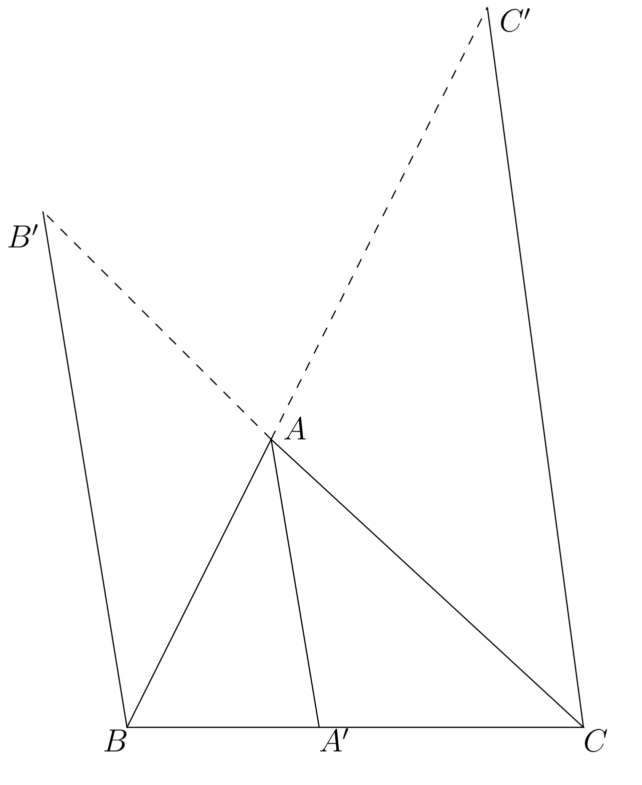

Figure 1: Théorème de Ceva avec droites parallèles.

Exercice 2. L'on rappelle les définitions suivantes.

Un espace vectoriel euclidien *est un couple (E, b) constitué d'un espace vectoriel réel de dimension finie et d'une forme bilinéaire symétrique définie positive $b : E \times E \to \mathbb{R}$, appelée aussi* produit scalaire.

Un espace affine euclidien *est un couple $(\mathcal{E}, b)$ constitué d'un espace affine réel de dimension finie $\mathcal{E}$ dirigé par un espace vectoriel euclidien (E, b).*

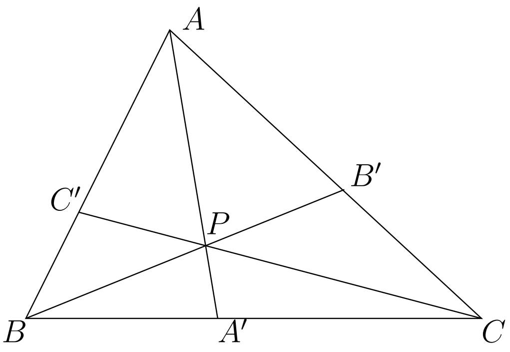

Figure 2: Théorème de Ceva avec droites concourantes.

Un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens *est un transformation linéaire bijective qui préserve les produits scalaires.*

Un isomorphisme d'espaces affines euclidiens *est une transformation affine bijective dont la partie linéaire préserve les produits scalaires.*

Un isomorphisme d'un espace vectoriel ou affine euclidien sur lui-même est appelé isométrie*.*

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel. Une bijection affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est dite positive *si le déterminant de sa partie linéaire est positif.*

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Une application $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une involution *si $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.*

1.i. Montrer que deux espaces vectoriels euclidiens sont isomorphes si et seulement si ils sont de même dimension.

Étant donnés (E, b) et (E', b'), un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens est un isomorphisme linéaire $\phi : E \to E'$ tel que $\phi^* b' = b$, ou encore

$$b'(\phi(v), \phi(w)) = b(v, w), \qquad \forall\, v, w \in E.$$

Il est clair que, si (E, b) et (E', b') sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels euclidiens, ils ont en particulier même dimension.

Réciproquement, supposons $\dim E = \dim E' = n$. Nous avons démontré en cours l'existence de bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de E', c'est-à-dire des bases telles que $b(e_i, e_j) = b'(e'_i, e'_j) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Définissons $\phi : E \to E'$ comme l'unique isomorphisme linéaire tel que $\phi(e_i) = e'_i$. L'on affirme que ϕ est alors un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens. En effet, étant donnés des vecteurs quelconques $v = \sum_i x_i e_i$, $w = \sum_j y_j e_j$ dans E, avec $x_i, y_j \in \mathbb{R}$, l'on a

$$b(v, w) = b(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_i x_i y_i = b'(\sum_i x_i e'_i, \sum_j y_j e'_j) = b'(\phi(v), \phi(w)).$$

1.ii. Montrer que deux espaces affines euclidiens sont isomorphes si et seulement si ils sont de même dimension.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines dirigés par des espaces vectoriels euclidiens (E, b) et respectivement (E', b'). Un isomorphisme d'espaces affines euclidiens est une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ telle que $\overrightarrow{\varphi} : E \to E'$ est un isomorphisme linéaire qui vérifie $\overrightarrow{\varphi}^* b' = b$. En particulier φ est un isomorphisme d'espaces affines.

Il est clair que, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont des espaces affines euclidiens isomorphes, ils ont même dimension puisqu'ils sont en particulier isomorphes en tant qu'espaces affines.

Réciproquement, fixons un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens $\phi : E \to E'$ avec $\phi^* b' = b$ (cf. 1.a). Soient $O \in \mathcal{E}$ et $O' \in \mathcal{E}'$ deux points arbitraires. Il existe une unique application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ telle que $\varphi(O) = O'$ et $\overrightarrow{\varphi} = \phi$. Alors φ est un isomorphisme d'espaces affines euclidiens.

2.i. Soit (E, b) un plan vectoriel euclidien. Montrer que l'ensemble des isométries linéaires positives de E qui sont des involutions est égal à $\{\pm \mathrm{Id}_E\}$.

Quitte à identifier (E, b) au plan euclidien standard $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni du produit scalaire euclidien standard, l'on se ramène à déterminer les éléments $A \in \mathrm{SO}(2)$ tels que $A^2 = \mathrm{Id}$. En écrivant $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, l'on a $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$, de sorte que $A^2 = \mathrm{Id}$ si et seulement si $2t \in 2\pi\mathbb{Z}$, ou encore $t \in \pi\mathbb{Z}$, ou encore $A = \pm \mathrm{Id}$.

2.ii. Soit $(\mathcal{E}, b)$ un plan affine euclidien. Déterminer les isométries affines positives de $\mathcal{E}$ qui sont des involutions. Est-ce que celles-ci forment un sous-groupe du groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$?

Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie affine positive qui est une involution. Alors $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ est une isométrie linéaire positive qui est une involution, donc $\overrightarrow{\varphi} = \pm \mathrm{Id}_E$ par le point 2.i. Soit $O \in \mathcal{E}$ un point quelconque et notons $\sigma = \sigma_O$ l'unique application affine qui fixe le point O et dont la partie linéaire est $-\mathrm{Id}_E$, ou encore l'homothétie de centre O et rapport -1. Toute transformation affine φ telle que $\overrightarrow{\varphi} = \pm \mathrm{Id}_E$ est alors nécessairement de la forme

$$\varphi = t_v \qquad \text{ou} \qquad \varphi = t_v \circ \sigma,$$

pour $v \in E$ et $t_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ la translation par le vecteur v.

Puisque $t_v^2 = t_{2v}$, l'on déduit que la seule translation qui est une involution est $t_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

L'on a par ailleurs $t_v \circ \sigma = \sigma \circ t_{-v}$. En effet, pour tout $w \in E$ l'application $t_v \circ \sigma$ envoie le point $O + w$ sur $(O - w) + v$, et l'application $\sigma \circ t_{-v}$ envoie le point $O + w$ sur $O - (w - v) = O - w + v$. Comme conséquence l'on obtient le fait que toute application $t_v \circ \sigma$ est une involution :

$$(t_v \sigma)^2 = t_v \sigma t_v \sigma = \sigma t_{-v} t_v \sigma = \sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}.$$

L'ensemble des isométries affines positives qui sont des involutions est donc

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\} \cup \{t_v \circ \sigma \ : \ v \in E\}.$$

Il est utile de noter que la description de cet ensemble ne dépend pas du choix du point $O \in \mathcal{E}$: étant donné un autre point $O' \in \mathcal{E}$, l'on a

$$\sigma_{O'} = t_u \circ \sigma_O, \qquad u = 2\overrightarrow{OO'}.$$

L'ensemble $\mathcal{A}$ ne forme pas un groupe : l'on a $t_v \sigma \circ t_w \sigma = t_{v-w} \sigma^2 = t_{v-w}$, et cette translation n'appartient à $\mathcal{A}$ que si $v - w = 0$, ou encore $v = w$.

3.i. Soit (E, b) un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Déterminer les isométries linéaires positives de $\mathcal{E}$ qui sont des involutions.

L'on identifie (E, b) à l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et l'on se ramène à trouver les éléments $A \in \mathrm{SO}(3)$ tels que $A^2 = \mathrm{Id}$. La classification des éléments de $\mathrm{SO}(3)$ montre qu'ils admettent toujours un axe fixe d et qu'ils agissent sur le plan $d^\perp$ orthogonal à cet axe comme des rotations. Le même argument qu'au point 2.i. montre que de tels éléments sont des involutions si et seulement si ils agissent sur le plan $d^\perp$ comme $\pm\mathrm{Id}$. [Argument alternatif : Les valeurs propres de A sont racines de $X^2 - 1$, donc égales à ± 1. Puisque $\det A = 1$, l'on peut avoir multiplicité trois sur la valeur propre 1, auquel cas $A = \mathrm{Id}$, ou multiplicité 1 sur la valeur propre 1 et multiplicité 2 sur la valeur propre -1 (A fixe une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ et agit sur le plan orthogonal par $-\mathrm{Id}$).]

Étant donnée une droite vectorielle $d \subset E$, notons R_d l'isométrie qui fixe d et qui agit sur $d^\perp$ comme $-\mathrm{Id}$. Alors l'ensemble des isométries positives de E qui sont des involutions est

$$\mathcal{B} = \mathrm{Id}_E \cup \{R_d \,:\, d \subset E \text{ droite vectorielle}\}.$$

Cet ensemble ne forme *pas* un sous-groupe de $SO(E, b)$ (contrairement à ce qui avait été initialement demandé de démontrer dans le sujet du partiel). En effet, soient $u, v \in E$ deux vecteurs unitaires qui ne sont ni orthogonaux ni colinéaires et considérons $A = R_{\langle u\rangle}$ et $B = R_{\langle v\rangle}$. Alors $AB \notin \mathcal{B}$. En effet $u^\perp \cap v^\perp$ est une droite d, sur laquelle AB agit par l'identité. D'un autre côté, si l'on écrit $v = au + bw$ avec $w \in u^\perp$, de sorte que $a, b \neq 0$, l'on aura $AB(v) = au - bw \neq \pm v$. Ainsi AB n'agit pas sur $d^\perp$ comme $\pm\mathrm{Id}$, donc $AB \notin \mathcal{B}$.

3.ii. Soit $(\mathcal{E}, b)$ un espace affine euclidien de dimension 3. Déterminer les isométries affines positives de $\mathcal{E}$ qui sont des involutions. Est-ce que celles-ci forment un groupe ?

Fixons $O \in \mathcal{E}$ et, pour chaque droite vectorielle $d \subset E$, notons $\mathcal{R}_d$ l'application affine qui fixe O et dont la partie linéaire est R_d. Si φ est une isométrie affine positive qui est une involution, alors $\vec{\varphi}$ est une isométrie linéaire positive qui est une involution, donc un élément de l'ensemble $\mathcal{B}$ du point 3.i. Alors nécessairement l'on doit chercher les isométries affines positives qui sont des involutions parmi les translations t_v, $v \in E$ ou parmi les applications de la forme $t_v \circ \mathcal{R}_d$, avec $v \in E$ et $d \subset E$ droite vectorielle.

Puisque $t_v^2 = t_{2v}$, l'unique translation qui est une involution est $t_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Considérons maintenant $(t_v \circ \mathcal{R}_d)^2$. L'on identifie $\mathcal{E}$ à E et $\mathcal{R}_d$ à R_d en vectorialisant en O. Écrivons le vecteur $v \in E$ comme $v = v^+ + v^-$, avec $v^+ \in d$ vecteur propre de valeur propre 1 et $v^- \in d^\perp$ vecteur propre de valeur propre -1. L'application $(t_v \circ \mathcal{R}_d)^2 = t_v\mathcal{R}_d t_v \mathcal{R}_d$ agit sur d comme :

$$u \mapsto u \mapsto u + v^+ + v^- \mapsto u + v^+ - v^- \mapsto u + 2v^+,$$

et elle agit sur $d^\perp$ comme :

$$u \mapsto -u \mapsto -u + v^+ + v^- \mapsto u + v^+ - v^- \mapsto u + 2v^+.$$

Ainsi

$$(t_v \circ \mathcal{R}_d)^2 = t_{2v^+},$$

qui vaut l'identité si et seulement si $v^+ = 0$.

L'ensemble des isométries affines positives qui sont des involutions dans un espace affine $(\mathcal{E}, b)$ de dimension 3 est donc

$$\mathcal{C} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\} \cup \{t_v \circ \mathcal{R}_d \,:\, d \subset E \text{ droite vectorielle et } v \in d^\perp\}.$$

Puisque tout élément de l'ensemble $\mathcal{B}$ du point 3.i admet un relèvement affine dans $\mathcal{C}$, et puisque $\mathcal{B}$ n'est pas un groupe, il s'ensuit que $\mathcal{C}$ n'est pas un groupe non plus.