4M001 - Géométrie affine et projective
M1 Sorbonne Université, 2018-2019
Alexandru Oancea

Complément de cours No. 1 - Groupes quotient

Extrait de Antoine Chambert-Loir, *Algèbre corporelle*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2005.

30 septembre 2018

4.4. Sous-groupes distingués, groupes quotients

La notion de *sous-groupe distingué* que nous introduisons maintenant apparaît naturellement lorsqu'on veut faire des *quotients* dans la catégorie des groupes : n'importe quel sous-groupe n'est pas le noyau d'un homomorphisme de groupes. En effet, soit $\varphi\colon G \to G'$ un homomorphisme de groupes ; si g, $h \in G$, on a

$$\varphi(g^{-1}hg) = \varphi(g)^{-1}\varphi(h)\varphi(g).$$

En particulier, si $\varphi(h) = e$, on a

$$\varphi(g^{-1}hg) = \varphi(g)^{-1}e\varphi(g) = e.$$

D'où la définition :

DÉFINITION 4.4.1. — *Un sous-groupe H d'un groupe G est dit* distingué *si pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$, $g^{-1}hg \in H$.*

PROPOSITION 4.4.2. — *Le noyau d'un homomorphisme de groupes est un sous-groupe distingué.*

Exemples 4.4.3. — *a*) Soit G un groupe. Les sous-groupes « triviaux » $\{1\}$ et G sont distingués dans G.

b) Si le groupe G est commutatif, tous ses sous-groupes sont distingués.

c) Soit Z l'ensemble des $g \in G$ tels que pour tout $h \in G$, $gh = hg$: le *centre* de G. C'est un sous-groupe distingué de G. En effet, si $h \in Z$ et $g \in G$, $g^{-1}hg = hg^{-1}g = h \in Z$.

d) Soit D le sous-groupe de G (*sous-groupe dérivé*) engendré par les expressions de la forme $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ avec g_1 et g_2 dans G (*commutateurs*). C'est un sous-groupe distingué de G. En effet, si $g \in G$ et $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$ est un commutateur, on a

$$\begin{aligned} g^{-1}(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1})g &= (g^{-1}g_1g)(g^{-1}g_2g)(g^{-1}g_1^{-1}g)(g^{-1}g_2^{-1}g) \\ &= (g^{-1}g_1g)(g^{-1}g_2g)(g^{-1}g_1g)^{-1}(g^{-1}g_2g)^{-1} \\ &= h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1} \end{aligned}$$

avec $h_1 = g^{-1}g_1g$ et $h_2 = g^{-1}h_1g$, donc est un commutateur. Notons D_0 l'ensemble des commutateurs dans G. Un élément d de D s'écrit $d_1 \dots d_n$ où les d_i sont des commutateurs (l'inverse d'un commutateur est encore un commutateur). Alors,

$$g^{-1}dg = (g^{-1}d_1g)\dots(g^{-1}d_ng)$$

est d'après la remarque ci-dessus un produit de commutateurs, donc appartient à D, cqfd.

Exercice 4.4.4. — Montrer que $H \subset G$ est distingué si et seulement si $gH = Hg$.

La construction du *groupe quotient* d'un groupe par un sous-groupe distingué montre inversement que tout sous-groupe distingué est le noyau d'un homomorphisme surjectif. Soit G/H l'ensemble des classes à droite modulo H. On définit une loi interne sur G/H : si g et g' sont dans G, h et h' dans H, on a

$$(gh)(g'h') = gg'(g')^{-1}hg'h',$$

et, puisque H est distingué dans G, $(g')^{-1}hg'$ appartient à H, et donc $(g')^{-1}hg'h'$ aussi. Ainsi, la classe à droite de gg' modulo H ne dépend que des classes à droite de g et g' et l'on peut poser

$$(gH) * (g'H) = (gg')H.$$

Une fois établi que cette définition a un sens, c'est un pure exercice de routine que de vérifier qu'elle munit G/H d'une structure de groupe d'élément neutre $H = eH$, et que l'application $G \to G/H$ qui à $g \in G$ associe sa classe à droite gH est un homomorphisme surjectif de groupes. Par construction, son noyau est H.

La vertu des groupes quotients est aussi de jouir d'un *théorème de factorisation* (encore une « propriété universelle ») :

THÉORÈME 4.4.5. — *Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué de G. Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes dont le noyau contient H. Alors, il existe un unique homomorphisme de groupes $\varphi : G/H \to G'$ tel que pour tout $g \in G$, $\varphi(\pi(g)) = f(g)$. (Autrement dit, $\varphi \circ \pi = f$.)*

Le noyau de φ est égal à $\pi(\operatorname{Ker} f)$. Ainsi, φ est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = H$. *Enfin, φ est surjectif si et seulement si f l'est.*

Démonstration. — Si $\pi(g) = \pi(g')$, il existe $h \in H$ tel que $g = g'h$. Ainsi, $f(g) = f(g'h) = f(g')f(h) = f(g')$ puisque $H \subset \operatorname{Ker} f$. Cela signifie que l'application de G/H dans G' qui associe à une classe de G/H l'image par f de n'importe lequel de ses membres est bien définie. Notons φ cette application ; elle vérifie $\varphi \circ \pi = f$ par construction.

Il est alors tout aussi routinier qu'avant de vérifier que $\varphi \colon G/H \to G'$ est un homomorphisme de groupes. Une classe gH appartient au noyau de φ si et seulement si $f(g) = e$, c'est-à-dire si et seulement si $g \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi, $\operatorname{Ker} \varphi = \pi(\operatorname{Ker} f)$. Dire que φ est injective signifie alors que $g \in \operatorname{Ker} f$ équivaut à $g \in H$, c'est-à-dire $H = \operatorname{Ker} f$. Enfin, si f est surjective, il est immédiat que φ l'est et réciproquement, si φ est surjective, f l'est aussi car π est surjectif. □

PROPOSITION 4.4.6. — *Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et $\pi \colon G \to G/H$ l'homomorphisme canonique de noyau H.*

a) *Si K est un sous-groupe de G/H, $\pi^{-1}(K)$ est un sous-groupe de G contenant H. Réciproquement, tout sous-groupe de G contenant H est de cette forme pour un unique sous-groupe de G/H, à savoir $\pi(H)$.*

b) *Si K est un sous-groupe distingué de G/H, alors l'application naturelle $G \to G/H \to (G/H)/K$ a pour noyau $\pi^{-1}(K)$ et induit un isomorphisme*

$$G/\pi^{-1}(K) \simeq (G/H)/K.$$

Démonstration. — *a*) Comme toute image réciproque d'un sous-groupe, $\pi^{-1}(K)$ est un sous-groupe de G. Il contient $\pi^{-1}(e) = H$. Inversement, soit K un sous-groupe de G contenant H. Alors, $\pi(K)$ est un sous-groupe de G/H et $\pi^{-1}(\pi(K))$ contient K. Pour montrer l'autre inclusion, soit $g \in \pi^{-1}(\pi(K))$. Alors $\pi(g) \in \pi(K)$, donc il existe $k \in K$ tel que $\pi(g) = \pi(k)$. Par suite, $h = gk^{-1}$ est un élément de $\operatorname{Ker} \pi = H$. Comme $H \subset K$, $g = hk \in K$.

b) L'application $f \colon G \to (G/H)/K$ est un morphisme de groupes, surjectif, comme composition de deux tels homomorphismes. De plus, un élément $g \in G$ apartient au noyau de f si et seulement si $\pi(g)$ appartient au noyau K du morphisme $G/H \to (G/H)/K$, si bien que $\operatorname{Ker} f = \pi^{-1}(K)$. Par suite, f induit un isomorphisme $G/\pi^{-1}(K) \simeq (G/H)/K$. □

DÉFINITION 4.4.7. — *On dit qu'un groupe G est* simple *s'il n'a pas de sous-groupe distingué non trivial.*