

Trois digressions sur les propriétés d'universalité, l'algèbre linéaire et les catégories

ALEXANDRU OANCEA

30 septembre 2018

1. OBJETS DÉFINIS PAR DES PROPRIÉTÉS D'UNIVERSALITÉ

Vous avez déjà rencontré de nombreux tels objets, même si vous n'avez pas toujours formulé les propriétés d'universalité correspondantes. Exemples dans la catégorie des espaces vectoriels : le quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace, la somme directe, le produit direct, le produit tensoriel. L'idée de cette digression est que toute construction "canonique" dans \mathbf{Vect} produit un modèle pour un objet défini par une propriété d'universalité (objet universel).

Plutôt que de donner la définition précise de ce qu'est en général une propriété d'universalité, nous allons illustrer cette notion par un exemple détaillé. Nous donnons par ailleurs les propriétés d'universalité de la somme directe, respectivement du produit direct d'une famille d'espaces vectoriels.

1.1. Espace vectoriel quotient. Soit V un espace vectoriel et $E \subseteq V$ un sous-espace. Considérons sur V la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in E$ et notons V/E l'ensemble des classes d'équivalence. Celui-ci porte une structure naturelle d'espace vectoriel, pour laquelle la projection $\pi : V \rightarrow V/E$ qui associe à un élément x sa classe d'équivalence $[x]$ est une application linéaire. L'espace vectoriel V/E est appelé *l'espace vectoriel quotient de V par E* . L'utilité de cette construction est donnée par le fait suivant :

Propriété d'universalité du quotient. Pour tout espace vectoriel W et toute application linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que $\ker f \supseteq E$, il existe une unique application linéaire $\bar{f} : V/E \rightarrow W$ telle que $\bar{f} \circ \pi = f$.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 \downarrow \pi & & \nearrow \exists! \bar{f} \\
 V/E & &
 \end{array}$$

Prenons maintenant un point de vue légèrement différent. Appelons **un quotient de V par E** une paire (\mathcal{Q}, π) , avec \mathcal{Q} un espace vectoriel

et $\pi : V \rightarrow \mathcal{Q}$ une application linéaire telle que $\ker \pi = E$, qui vérifie la *propriété d'universalité* suivante : pour tout espace vectoriel W et toute application linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que $\ker f \supseteq E$, il existe une unique application linéaire $\bar{f} : \mathcal{Q} \rightarrow W$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \pi & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ \mathcal{Q} & & \end{array}$$

Évidemment, le quotient V/E vérifie cette propriété d'universalité. Mais y aurait-il d'autres quotients ? La réponse est fournie par la proposition suivante, qui montre que la construction est parfaitement déterminée.

Proposition 1.1. *Un quotient de V par E est unique à isomorphisme unique près, c'est-à-dire si (\mathcal{Q}, π) et (\mathcal{Q}', π') sont deux quotients de V par E , il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{Q} \xrightarrow{\cong} \mathcal{Q}'$.*

Démonstration. Appliquons la propriété universelle de (\mathcal{Q}, π) avec $W = \mathcal{Q}'$ et $f = \pi'$. L'on trouve une unique application $\bar{\pi}' : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$ telle que $\bar{\pi}' \circ \pi = \pi'$. Appliquons ensuite la propriété universelle de (\mathcal{Q}', π') avec $W = \mathcal{Q}$ et $f = \pi$. L'on trouve une unique application $\bar{\pi} : \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{Q}$ telle que $\bar{\pi} \circ \pi' = \pi$. En particulier $(\bar{\pi} \circ \bar{\pi}') \circ \pi = \pi$. Puisque $\text{Id}_{\mathcal{Q}} \circ \pi = \pi$, l'unicité dans la propriété universelle de (\mathcal{Q}, π) avec $W = \mathcal{Q}$ et $f = \pi$ montre que $\bar{\pi} \circ \bar{\pi}' = \text{Id}_{\mathcal{Q}}$. De même l'on démontre que $\bar{\pi}' \circ \bar{\pi} = \text{Id}_{\mathcal{Q}'}$, de sorte que $\bar{\pi}'$ et $\bar{\pi}$ sont des isomorphismes canoniquement déterminés, inverses l'un de l'autre.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{Q}' \\ \downarrow \pi & \nearrow \exists! \bar{\pi}' & \\ \mathcal{Q} & & \end{array} & \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Q} \\ \downarrow \pi' & \nearrow \exists! \bar{\pi} & \\ \mathcal{Q}' & & \end{array} & \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Q} \\ \downarrow \pi & \nearrow \text{Id} = \bar{\pi} \circ \bar{\pi}' & \\ \mathcal{Q} & & \end{array} \end{array}$$

□

L'on lit la proposition précédente en disant que la *propriété d'universalité détermine le quotient à isomorphisme unique près*. La construction du quotient V/E montre l'existence du quotient. La propriété d'universalité met par ailleurs en avant la projection canonique $\pi : V \rightarrow V/E$, que nous allons rencontrer à nouveau dans §2.

1.2. Somme directe et produit direct. Soit (V_i) une famille d'espaces vectoriels.

Propriété d'universalité de la somme directe. Une somme directe des V_i est un espace vectoriel \mathcal{Q} muni d'applications linéaires $\text{incl}_i :$

$V_i \rightarrow \mathcal{Q}$ qui satisfont la propriété suivante : pour tout espace vectoriel W et toute collection d'applications linéaires $f_i : V_i \rightarrow W$, il existe une unique application linéaire $F : \mathcal{Q} \rightarrow W$ telle que $F \circ \text{incl}_i = f_i$ pour tout i .

Cette propriété d'universalité détermine \mathcal{Q} à isomorphisme canonique près. Un modèle explicite est donné par $\mathcal{Q} = \bigoplus_i V_i$, dont les éléments sont les sommes formelles *finies* d'éléments appartenant aux V_i . Les applications incl_i sont les inclusions canoniques, et l'application F déterminée par des $f_i : V_i \rightarrow W$ est notée $\bigoplus_i f_i$.

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_i} & W \\ \text{incl}_i \downarrow & \nearrow & \\ \bigoplus_i V_i & \xrightarrow{\bigoplus_i f_i} & \end{array}$$

Propriété d'universalité du produit direct. Un produit direct des V_i est un espace vectoriel \mathcal{Q} muni d'applications linéaires $\text{proj}_i : \mathcal{Q} \rightarrow V_i$ qui satisfont la propriété suivante : pour tout espace vectoriel W et toute collection d'applications linéaires $g_i : W \rightarrow V_i$, il existe une unique application linéaire $G : W \rightarrow \mathcal{Q}$ telle que $\text{proj}_i \circ G = g_i$ pour tout i .

Cette propriété d'universalité détermine \mathcal{Q} à isomorphisme canonique près. Un modèle explicite est donné par $\mathcal{Q} = \prod_i V_i$, dont l'ensemble sous-jacent est le produit cartésien des V_i . Les applications proj_i sont les projections canoniques, et l'application G déterminée par des $g_i : W \rightarrow V_i$ est notée $\prod_i g_i$.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\prod_i g_i} & \prod_i V_i \\ & \searrow g_i & \downarrow \text{proj}_i \\ & & V_i \end{array}$$

Remarque. Les opérations de somme directe et celle de produit direct peuvent être interprétées comme étant duales l'une de l'autre. La somme directe est un espace *depuis lequel* on peut définir des morphismes, le produit direct est un espace *vers lequel* on peut définir des morphismes. Un autre point de vue est celui des isomorphismes canoniques

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_i V_i, W\right) \cong \prod_i \text{Hom}(V_i, W),$$

et en particulier

$$\left(\bigoplus_i V_i\right)^* \cong \prod_i V_i^*.$$

2. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES VS. ÉQUATIONS CARTÉSIENNES POUR DES SOUS-ESPACES VECTORIELS

Dans cette section je reformule à l'aide des notions d'espace vectoriel quotient et d'espace vectoriel dual deux points de vue familiers sur les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V : ceux-ci peuvent être décrits ou bien par des équations paramétriques, ou bien par des équations cartésiennes.

Étant donné un sous-espace $E^k \subset V^n$ (la notation signifie que E est de dimension k et V est de dimension n), le point de vue des équations paramétriques consiste à donner une application linéaire $\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow V$ avec $\text{im } \Psi = E$. Une telle “paramétrisation linéaire” est injective précisément lorsque $N = k = \dim E$, et dans ce cas $\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ est un isomorphisme linéaire.

Le point de vue des équations cartésiennes consiste à se donner une application linéaire $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ avec $\ker \Phi = E$. Un tel “système d'équations cartésiennes” est surjectif précisément lorsque $N = n - k$, la codimension de E , notée aussi $\text{codim } E$. Dans ce cas l'application induite $\bar{\Phi} : V/E \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est un isomorphisme linéaire.

Ces deux points de vue sont *duals* en un sens très précis. Une paramétrisation linéaire injective équivaut à la donnée de k éléments linéairement indépendants $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \text{Hom}(\mathbb{R}, V)$ tels que $\text{im } \epsilon_i \subset E$ pour tout i . Via l'isomorphisme canonique

$$\text{Hom}(\mathbb{R}, V) \xrightarrow{\sim} V, \quad \epsilon \mapsto e := \epsilon(1)$$

la condition $\text{im } \epsilon_i \subset E$ se traduit par $e_i \in E$. En d'autres termes, se donner une paramétrisation linéaire injective de E revient à se donner une base (e_1, \dots, e_k) de E .

La donnée d'un système minimal d'équations cartésiennes équivaut à la donnée de $n - k$ éléments linéairement indépendants $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k} \in \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ tels que $E \subset \ker \alpha_i$ pour tout i . L'espace $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$ est appelé le *dual de V* et il est noté

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R}).$$

Soit $\pi : V \rightarrow V/E$ la projection canonique. Celle-ci induit un isomorphisme canonique

$$(V/E)^* \xrightarrow{\sim} \{\alpha \in V^* : E \subset \ker \alpha\}, \quad a \mapsto \alpha := a \circ \pi.$$

Via cet isomorphisme, la donnée d'un système minimal d'équations cartésiennes équivaut à la donnée d'une base (a_1, \dots, a_{n-k}) de $(V/E)^*$.

3. ISOMORPHISMES CANONIQUES, CATÉGORIES

Arrêtons-nous un instant sur la notion d'*isomorphisme canonique* qui est apparue à plusieurs reprises dans la discussion du §1.

Définition informelle. Soit \mathcal{C} un “contexte mathématique”. Un objet est dit *canonique* si sa construction ne fait pas intervenir de choix extérieurs au contexte \mathcal{C} .

Dans une première approximation, lorsque le contexte mathématique auquel on fait référence est celui des espaces vectoriels, un objet est dit “canonique” si sa construction ne nécessite pas le choix d’une base. Nous rendrons rigoureuse cette définition plus bas, lorsque nous parlerons de *catégories*.

Exemple. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On a un isomorphisme canonique

$$V \xrightarrow{\cong} V^{**}, \quad v \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(v)) \quad (\alpha \in V^*)$$

Exemple. Soit V est un espace vectoriel de dimension finie. Les espaces V et V^* sont isomorphes (puisque de même dimension), mais *pas* de manière canonique. Vous connaissez au moins un moyen de décrire un isomorphisme : on choisit une base (e_i) de V , on définit la *base duale* (e_i^*) de V^* par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, avec

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

le *symbole de Kronecker*, et l’on définit l’isomorphisme linéaire $V \xrightarrow{\cong} V^*$ par $e_i \mapsto e_i^*$.

Une meilleure manière de décrire un isomorphisme entre V et V^* est de se donner une forme bilinéaire non-dégénérée sur V . Une forme bilinéaire $B \in \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ est dite *non-dégénérée* si $B(v, \cdot) = 0$ implique $v = 0$. En présence d’un tel élément $B \in \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \cong V^* \otimes V^*$, l’application $V \longrightarrow V^*$, $v \mapsto B(v, \cdot)$ est une application linéaire entre espaces de même dimension, et donc un isomorphisme linéaire de V sur V^* . L’isomorphisme entre V et V^* n’est pas canonique dans la catégorie des espaces vectoriels réels, mais il est canonique dans la catégorie des espaces vectoriels réels munis d’un produit scalaire.

Exercice 1. Démontrer que l’on a un isomorphisme canonique $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \cong V^* \otimes V^*$.

La notion de catégorie, I.

Définition 3.1. Une catégorie \mathcal{C} consiste en une collection d’objets, notée $\text{Ob}\mathcal{C}$, ainsi que de la donnée d’un ensemble de morphismes $\mathcal{C}(x, y)$ entre chaque deux objets x et y de \mathcal{C} . On requiert l’existence

d'un morphisme distingué $\mathbb{1}_x \in \mathcal{C}(x, x)$ pour tout objet x , appelé identité de x , et d'une application de composition

$$\mathcal{C}(x, y) \times \mathcal{C}(y, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, z),$$

notée $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$, ou encore $\beta \circ \alpha$. On demande à ce que cette loi de composition soit associative, et l'on demande à ce que la composition à droite ou à gauche avec l'identité d'un objet soit l'identité.

Lorsque je parlais plus haut de "contexte mathématique", ce qu'il faut lire désormais est "catégorie". Vous connaissez déjà de nombreux exemples.

- La catégorie Set des ensembles, avec $\text{Set}(x, y) = y^x$.
- La catégorie Top des espaces topologiques, avec $\text{Top}(x, y)$ l'ensemble des applications continues de x vers y .
- La catégorie Vect des espaces vectoriels de dimension finie, avec $\text{Vect}(x, y)$ l'ensemble des applications linéaires de x vers y .
- La catégorie EuclVect des espaces vectoriels de dimension finie munis d'un produit scalaire, avec $\text{EuclVect}(x, y)$ l'ensemble des applications linéaires de x vers y qui préservent le produit scalaire.
- La catégorie Op_n des ouverts de \mathbb{R}^n , avec $\text{Op}_n(x, y)$ l'ensemble des applications lisses définies sur x à valeurs dans y .

Nous pouvons reformuler la discussion précédente dans les termes suivants : V est canoniquement isomorphe à V^{**} dans Vect, et V est canoniquement isomorphe à V^* dans EuclVect.

Exercice 2. Préciser le dernier énoncé en indiquant quel produit scalaire on met sur V^* .