Sorbonne Université
M1 Mathématiques 2018-2019

4M001 Géométrie affine et projective
E. Lepage, A. Oancea

Examen final du 10 janvier 2019

Durée : 3 heures

Le clarté des explications sera appréciée. Sont autorisées les notes individuelles de cours et de TD, ainsi que les deux polycopiés du cours. Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 : (demi-plans affines) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine réel, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ une droite et $A \in \mathcal{P}$ un point qui n'est pas situé sur la droite $\mathcal{D}$. On note

$$\mathcal{P}_A = \{M \in \mathcal{P} \,:\, [AM] \cap \mathcal{D} = \varnothing\},$$

où $[AM]$ désigne le segment d'extrémités A et M. On appelle $\mathcal{P}_A$ le *demi-plan ouvert déterminé par* $\mathcal{D}$ *qui contient* A.

1. Soient $I, P \in \mathcal{D}$ deux points distincts. Montrer que (I, P, A) est un repère affine.
2. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ nous écrivons $M = \lambda_1 I + \lambda_2 P + \lambda_3 A$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ pour signifier que les coordonnées barycentriques de P dans le repère affine (I, P, A) sont $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Montrer que pour tout repère affine comme dans (i) la coordonnée λ_3 selon A est indépendante du choix de I et P. On la note $\lambda_3(M)$.
3. Montrer les égalités d'ensembles
$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \,:\, \lambda_3(M) = 0\}, \qquad \mathcal{P}_A = \{M \in \mathcal{P} \,:\, \lambda_3(M) > 0\}.$$
4. Montrer que, pour tout point $B \in \mathcal{P}_A$, l'on a
$$\mathcal{P}_B = \mathcal{P}_A.$$
5. Soit $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une transformation affine bijective qui préserve la droite $\mathcal{D}$, c'est-à-dire qui vérifie $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Montrer que
$$\varphi(\mathcal{P}_A) = \mathcal{P}_{\varphi(A)}.$$
6. Donner un exemple de transformation affine bijective $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui préserve $\mathcal{D}$ et vérifie $\varphi(\mathcal{P}_A) \neq \mathcal{P}_A$.
7. Donner un exemple de transformation affine bijective $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui préserve $\mathcal{D}$, qui vérifie $\varphi(\mathcal{P}_A) = \mathcal{P}_A$ et telle que :
   i) φ est une translation par un vecteur non-nul.
   ii) φ n'est pas une translation.

Solution de l'exercice 1.

1. Le vecteur $\overrightarrow{IP}$ est non-nul puisque I et P sont distincts. Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ est non-nul puisque $A \neq I$ et il n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{IP}$ puisque $A \notin \mathcal{D}$. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{IP}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, direction de $\mathcal{P}$, qui est de dimension 2.

2. Soient I' et P' deux autres points distincts de $\mathcal{D}$. Ils forment donc un repère affine de $\mathcal{D}$ et l'on peut écrire de manière unique en coordonnées barycentriques

$$I = a_1 I' + b_1 P', \qquad P = a_2 I' + b_2 P',$$

où $a_1 + b_1 = 1$ et $a_2 + b_2 = 1$. L'on peut alors calculer les coordonnées barycentriques de M dans le repère (I', P', A) :

$$\begin{aligned} M &= \lambda_1 I + \lambda_2 P + \lambda_3 A \\ &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) I' + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) P' + \lambda_3 A, \end{aligned}$$

avec $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) + \lambda_3 = 1$. L'on voit que la coordonnée barycentrique λ_3 ne dépend pas du choix de repère (I, P) sur la droite $\mathcal{D}$.

3. L'égalité $\mathcal{D} = \{M : \lambda_3(M) = 0\}$ découle du fait que (I, P) est un repère affine de $\mathcal{D}$. Ainsi $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points qui sont combinaisons affines de I et P. Tout point $M \in \mathcal{D}$ s'écrit de manière unique comme $M = \lambda_1 I + \lambda_2 P$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, et donc aussi $M = \lambda_1 I + \lambda_2 P + 0 \cdot A$.

Montrons maintenant $\mathcal{P}_A \subseteq \{M : \lambda_3(M) > 0\}$. Supposons le contraire : il existe un point $M \in \mathcal{P}_A$ avec $\lambda_3(M) \leqslant 0$. Le segment $[AM]$ est l'ensemble des points $Q = tA + (1-t)M$, $t \in [0,1]$. Par hypothèse $Q \in \mathcal{P}_A$ et donc $\lambda_3(Q) \neq 0$. Or

$$Q = tA + (1-t)M = (1-t)\lambda_1 I + (1-t)\lambda_2 P + (t + (1-t)\lambda_3)A.$$

L'on voit qu'il existe (un unique) $t \in \mathbb{R}$ tel que $t + (1-t)\lambda_3 = 0$, à savoir $t = \lambda_3/(\lambda_3 - 1)$ et l'on vérifie que l'on a bien $t \in [0,1]$ grâce à l'hypothèse $\lambda_3 \leqslant 0$. Le segment $[AM]$ intersecte donc $\mathcal{D}$, une contradiction.

Pour montrer l'inclusion inverse $\mathcal{P}_A \supseteq \{M : \lambda_3(M) > 0\}$ l'on fait un calcul similaire et l'on note que, si $\lambda_3 = \lambda_3(M) > 0$, alors l'équation $t + (1-t)\lambda_3 = 0$ n'a pas de solution $t \in [0,1]$.

4. Soit $B \in \mathcal{P}_A$ et montrons $\mathcal{P}_A \subset \mathcal{P}_B$. Par définition $[AB] \cap \mathcal{D} = \varnothing$ et donc $[BA] \cap \mathcal{D} = \varnothing$. Ainsi $A \in \mathcal{P}_B$. En exprimant A en coordonnées barycentriques par rapport au repère (I, P, B) l'on a $A = \mu_1 I + \mu_2 P + \mu_3 B$ avec $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ et $\mu_3 > 0$. Tout point $M \in \mathcal{P}_A$ s'écrit

$$M = \lambda_1 I + \lambda_2 P + \lambda_3 A = (\lambda_1 + \lambda_3\mu_1)I + (\lambda_2 + \lambda_3\mu_2)P + \lambda_3\mu_3 B.$$

Puisque $\lambda_3 > 0$ et $\mu_3 > 0$ l'on obtient $\lambda_3\mu_3 > 0$ et donc $M \in \mathcal{P}_B$.

L'inclusion inverse est une conséquence de l'inclusion directe appliquée au point $A \in \mathcal{P}_B$.

5. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ l'on a $\varphi([AM]) = [\varphi(A)\varphi(M)]$. Puisque φ est bijective et $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, nous avons l'équivalence

$$[AM] \cap \mathcal{D} = \varnothing \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi([AM]) \cap \mathcal{D} = \varnothing \qquad \Leftrightarrow \qquad [\varphi(A)\varphi(M)] \cap \mathcal{D} = \varnothing.$$

Ainsi $M \in \mathcal{P}_A$ si et seulement si $\varphi(M) \in \mathcal{P}_{\varphi(A)}$, donc $\varphi(\mathcal{P}_A) = \mathcal{P}_{\varphi(A)}$.

6. Une symétrie par rapport à $\mathcal{D}$.

7. i. Une translation par un vecteur non-nul contenu dans $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, la direction de $\mathcal{D}$.

7. ii. Une homothétie dont le centre est situé sur la droite $\mathcal{D}$ et dont le rapport est positif et différent de 1.

Exercice 2 : (conique projective) Dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ muni des coordonnées homogènes standard $[X : Y : Z]$ l'on considère la conique

$$\mathcal{C} \,:\, X^2 - Y^2 - Z^2 = 0.$$

1. Justifier que la conique $\mathcal{C}$ est lisse.
2. Déterminer les deux points d'intersection A, B de la droite $\{Z = 0\}$ avec la conique $\mathcal{C}$.
3. Déterminer l'équation des tangentes T_A, T_B à $\mathcal{C}$ en ces points d'intersection.
4. Déterminer le point d'intersection $T_A \cap T_B$ de ces deux tangentes.
5. Donner une équation de la conique affine déterminée par $\mathcal{C}$ en choisissant la droite $\{Z = 0\}$ comme droite à l'infini.
6. Reconnaître une hyperbole affine et montrer que les droites affines déterminées par les tangentes T_A et T_B sont les droites asymptotes de cette hyperbole.

Solution de l'exercice 2.

1. La forme quadratique $q(X, Y, Z) = X^2 - Y^2 - Z^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est non-dégénérée, donc par un critère vu en cours la conique est lisse.

De manière directe, l'on voit que pour tout triplet $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ la différentielle formelle $dq(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 dX - 2y_0 dY - 2z_0 dZ$ est non-nulle. En particulier $\mathcal{C}$ est lisse en chacun de ses points $[x_0 : y_0 : z_0]$.

2. Les deux points d'intersection sont $A = [1 : 1 : 0]$ et $B = [1 : -1 : 0]$.

3. L'équation de la tangente en A est $2X - 2Y = 0$, ou encore

$$T_A \,:\, X - Y = 0.$$

L'équation de la tangente en B est $2X + 2Y = 0$, ou encore

$$T_B \,:\, X + Y = 0.$$

4. L'on a $T_A \cap T_B = \{[0 : 0 : 1]\}$.

5. L'on déshomogénéise par rapport à la variable Z :

$$X^2 - Y^2 - Z^2 = 0, \quad Z \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{X}{Z}\right)^2 - \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 - 1 = 0.$$

L'on trouve donc comme équation de la conique affine $\mathcal{C}_{aff}$ déterminée par $\mathcal{C}$ sur l'ouvert affine $\{Z \neq 0\}$:

$$\mathcal{C}_{aff} \,:\, x^2 - y^2 = 1.$$

6. Ceci est bien une hyperbole affine. Ses asymptotes sont les deux droites dont l'union est donnée par l'équation $x^2 - y^2 = 0$, donc les droites d'équations $x - y = 0$ et $x + y = 0$. Ce sont bien les droites affines déterminées par les tangentes T_A et T_B, puisque l'équation $X - Y = 0$ se déshomogénéise par rapport à la variable Z en $x - y = 0$, alors que l'équation $X + Y = 0$ se déshomogénéise en l'équation $x + y = 0$.

Exercice 3 : (hyperboles euclidiennes) Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit euclidien standard et des coordonnées standard (x, y) considérons la famille d'hyperboles

$$\mathcal{H}_\lambda \,:\, x^2 - y^2 = \lambda, \qquad \lambda \neq 0.$$

1. Dessiner quelques éléments de cette famille dans un même repère de coordonnées.
2. Déterminer pour l'hyperbole $\mathcal{H}_\lambda$ les deux points qui réalisent la distance de l'origine à $\mathcal{H}_\lambda$, définie comme
$$d(O, \mathcal{H}_\lambda) = \inf\{d(O, P) \,:\, P \in \mathcal{H}_\lambda\}.$$
3. Soit $A \in O(2)$ et $A(\mathcal{H}_\lambda)$ l'image de $\mathcal{H}_\lambda$ par A. Montrer l'égalité
$$d(O, \mathcal{H}_\lambda) = d(O, A(\mathcal{H}_\lambda)).$$
4. Déterminer les paires de réels non-nuls (λ, μ) pour lesquels il existe un élément $A \in SO(2)$ tel que
$$A(\mathcal{H}_\lambda) = \mathcal{H}_\mu.$$
5. Déterminer les éléments $A \in O(2)$ tels que $A(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_1$.
6. Considérons maintenant aussi la famille
$$\mathcal{K}_\mu \,:\, xy = \mu, \qquad \mu \neq 0.$$
Montrer que, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, l'hyperbole $\mathcal{H}_\lambda$ intersecte l'hyperbole $\mathcal{K}_\mu$ orthogonalement au sens suivant : en tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}_\lambda \cap \mathcal{K}_\mu$ les tangentes à $\mathcal{H}_\lambda$ et $\mathcal{K}_\mu$ sont orthogonales. On dit que $\mathcal{H}_\lambda$ *est orthogonale à* $\mathcal{K}_\mu$ et on le note
$$\mathcal{H}_\lambda \perp \mathcal{K}_\mu.$$

Solution de l'exercice 3. 2. Pour $\lambda > 0$ les deux points sont $(\pm\sqrt{\lambda}, 0)$. Pour $\lambda < 0$ les deux points sont $(0, \pm\sqrt{|\lambda|})$. Dans les deux cas la distance de l'origine à l'hyperbole $\mathcal{H}_\lambda$ est

$$d(O, \mathcal{H}_\lambda) = \sqrt{|\lambda|}.$$

3. L'on a

$$\begin{aligned} d(O, A(\mathcal{H}_\lambda)) &= \inf\{d(O, P) \,:\, P \in A(\mathcal{H}_\lambda)\} \\ &= \inf\{d(O, A(P)) \,:\, P \in \mathcal{H}_\lambda\} \\ &= \inf\{d(O, P) \,:\, P \in \mathcal{H}_\lambda\} \\ &= d(O, \mathcal{H}_\lambda). \end{aligned}$$

La troisième égalité utilise le fait que A est une isométrie et $A(O) = O$.

4. En vue du point 3. si $A(\mathcal{H}_\lambda) = \mathcal{H}_\mu$ alors $\sqrt{|\lambda|} = \sqrt{|\mu|}$. Ainsi $\mu = \pm\lambda$. De plus, les paires de points qui réalisent la distance se correspondent. Donc A est nécessairement $\pm\mathrm{Id}$ pour $\mu = \lambda$ et A est la rotation par $\pm\pi/2$ pour $\mu = -\lambda$. L'on vérifie directement que l'on a bien alors $A(\mathcal{H}_\lambda) = \mathcal{H}_\mu$. Les paires de réels demandées dans l'énoncé sont donc

$$(\lambda, \pm\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

5. Il y a 4 tels éléments : $\pm\mathrm{Id}$ et les symétries orthogonales par rapport aux axes de coordonnées. Les transformations possibles sont déterminées en analysant leur effet sur les points qui réalisent la distance $d(O, \mathcal{H}_1)$, à savoir $(\pm 1, 0)$. L'on a nécessairement $A((1, 0)) = (\pm 1, 0)$. Dans le cas $A((1, 0)) = (1, 0)$ l'on a nécessairement $A((0, 1)) = (0, \pm 1)$ puisqu'une base orthonormée est transformée en une base orthonormée. Dans le cas $A((1, 0)) = (-1, 0)$ l'on a encore $A((0, 1)) = (0, \pm 1)$ pour la même raison.

6. Soit (x_0, y_0) un point d'intersection. La direction de la tangente en (x_0, y_0) à $\mathcal{H}_\lambda$ a comme équation $x_0 x - y_0 y = 0$, elle est donc dirigée par (y_0, x_0). La direction de la tangente en (x_0, y_0) à $\mathcal{K}_\mu$ a comme équation $y_0 x + x_0 y = 0$, elle est donc dirigée par $(x_0, -y_0)$. Puisque $(y_0, x_0) \perp (x_0, -y_0)$ la conclusion en découle.