Examen final du 10 janvier 2019

Durée : 3 heures

Le clarté des explications sera appréciée. Sont autorisées les notes individuelles de cours et de TD, ainsi que les deux polycopiés du cours. Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants.

Exercice 1 : (demi-plans affines) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine réel, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ une droite et $A \in \mathcal{P}$ un point qui n'est pas situé sur la droite $\mathcal{D}$. On note

$$\mathcal{P}_A = \{M \in \mathcal{P} \,:\, [AM] \cap \mathcal{D} = \varnothing\},$$

où $[AM]$ désigne le segment d'extrémités A et M. On appelle $\mathcal{P}_A$ le *demi-plan ouvert déterminé par $\mathcal{D}$ qui contient A.*

1. Soient $I, P \in \mathcal{D}$ deux points distincts. Montrer que (I, P, A) est un repère affine.
2. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ nous écrivons $M = \lambda_1 I + \lambda_2 P + \lambda_3 A$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ pour signifier que les coordonnées barycentriques de P dans le repère affine (I, P, A) sont $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Montrer que pour tout repère affine comme dans (i) la coordonnée λ_3 selon A est indépendante du choix de I et P. On la note $\lambda_3(M)$.
3. Montrer les égalités d'ensembles
$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} \,:\, \lambda_3(M) = 0\}, \qquad \mathcal{P}_A = \{M \in \mathcal{P} \,:\, \lambda_3(M) > 0\}.$$
4. Montrer que, pour tout point $B \in \mathcal{P}_A$, l'on a
$$\mathcal{P}_B = \mathcal{P}_A.$$
5. Soit $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une transformation affine bijective qui préserve la droite $\mathcal{D}$, c'est-à-dire qui vérifie $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Montrer que
$$\varphi(\mathcal{P}_A) = \mathcal{P}_{\varphi(A)}.$$
6. Donner un exemple de transformation affine bijective $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui préserve $\mathcal{D}$ et vérifie $\varphi(\mathcal{P}_A) \neq \mathcal{P}_A$.
7. Donner un exemple de transformation affine bijective $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui préserve $\mathcal{D}$, qui vérifie $\varphi(\mathcal{P}_A) = \mathcal{P}_A$ et telle que :
   i) φ est une translation par un vecteur non-nul.
   ii) φ n'est pas une translation.

Exercice 2 : (conique projective) Dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ muni des coordonnées homogènes standard $[X : Y : Z]$ l'on considère la conique
$$\mathcal{C} \,:\, X^2 - Y^2 - Z^2 = 0.$$

1. Justifier que la conique $\mathcal{C}$ est lisse.
2. Déterminer les deux points d'intersection A, B de la droite $\{Z = 0\}$ avec la conique $\mathcal{C}$.
3. Déterminer l'équation des tangentes T_A, T_B à $\mathcal{C}$ en ces points d'intersection.
4. Déterminer le point d'intersection $T_A \cap T_B$ de ces deux tangentes.
5. Donner une équation de la conique affine déterminée par $\mathcal{C}$ en choisissant la droite $\{Z = 0\}$ comme droite à l'infini.
6. Reconnaître une hyperbole affine et montrer que les droites affines déterminées par les tangentes T_A et T_B sont les droites asymptotes de cette hyperbole.

Exercice 3 : (hyperboles euclidiennes) Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit euclidien standard et des coordonnées standard (x, y) considérons la famille d'hyperboles
$$\mathcal{H}_\lambda \,:\, x^2 - y^2 = \lambda, \qquad \lambda \neq 0.$$

1. Dessiner quelques éléments de cette famille dans un même repère de coordonnées.
2. Déterminer pour l'hyperbole $\mathcal{H}_\lambda$ les deux points qui réalisent la distance de l'origine à $\mathcal{H}_\lambda$, définie comme
$$d(O, \mathcal{H}_\lambda) = \inf\{d(O, P) \,:\, P \in \mathcal{H}_\lambda\}.$$
3. Soit $A \in O(2)$ et $A(\mathcal{H}_\lambda)$ l'image de $\mathcal{H}_\lambda$ par A. Montrer l'égalité
$$d(O, \mathcal{H}_\lambda) = d(O, A(\mathcal{H}_\lambda)).$$
4. Déterminer les paires de réels non-nuls (λ, μ) pour lesquels il existe un élément $A \in SO(2)$ tel que
$$A(\mathcal{H}_\lambda) = \mathcal{H}_\mu.$$
5. Déterminer les éléments $A \in O(2)$ tels que $A(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_1$.
6. Considérons maintenant aussi la famille
$$\mathcal{K}_\mu \,:\, xy = \mu, \qquad \mu \neq 0.$$
Montrer que, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, l'hyperbole $\mathcal{H}_\lambda$ intersecte l'hyperbole $\mathcal{K}_\mu$ orthogonalement au sens suivant : en tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}_\lambda \cap \mathcal{K}_\mu$ les tangentes à $\mathcal{H}_\lambda$ et $\mathcal{K}_\mu$ sont orthogonales. On dit que $\mathcal{H}_\lambda$ *est orthogonale à* $\mathcal{K}_\mu$ et on le note
$$\mathcal{H}_\lambda \perp \mathcal{K}_\mu.$$