Algèbre géométrique - TD0
Actions de groupes

Exercice 1 : Soient X un ensemble fini et G un groupe fini agissant sur X. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ un système de représentants de X/G (ainsi $n = |X/G|$). Montrer la "formule des classes" :

$$\frac{|X|}{|G|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\mathrm{Stab}(x_i)|}.$$

Exercice 2 :

a) Montrer que si G est un groupe fini et H un sous-groupe strict de G, alors la réunion des conjugués de H n'est pas égale à G tout entier. Que dire si le groupe G est infini et si H est d'indice fini dans G ? Et si on suppose seulement G infini ?

b) Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini X tel que $|X| \geq 2$. Montrer qu'il existe $g \in G$ ne fixant aucun point de X.

Exercice 3 : Soit K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie n. On note B l'ensemble des bases de V, $G = GL(V)$ et $X := \{\underline{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in V^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in B\}$.
On munit B et K^n d'une action de G en posant $g \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (g(x_1), \ldots, g(x_n))$. De même, on munit X d'une action de G en posant $g \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) = (g(x_1), \ldots, g(x_{n+1}))$.

a) Montrer que l'application $f : X \to K^n$ qui à $\underline{x}$ associe les coordonnées de x_{n+1} dans la base $(x_1, \ldots, x_n)$ est constante sur les G-orbites.

b) En déduire une bijection de X/G vers K^n.

c) On considère maintenant l'action de G sur $\mathrm{End}(V)$ par multiplication à gauche (resp. à droite). Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que deux endomorphismes de V soient dans la même orbite sous G.

Exercice 4 : Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. En considérant l'ensemble

$$E := \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\},$$

calculer le nombre moyen de point fixes d'un élément de G.
Que dire en particulier si l'action est transitive ?

Exercice 5 : Combien y a-t-il de colliers différents formés de 9 perles dont 4 bleues, 3 blanches et 2 rouges ?

Exercice 6 : Soit G un groupe fini non trivial agissant sur un ensemble fini X. On suppose que pour tout $g \neq e \in G$, il existe un unique $x \in X$ tel que $g \cdot x = x$. On souhaite montrer que X admet un point fixe sous G (nécessairement unique).

a) On note $Y := \{x \in X : \mathrm{Stab}_G(x) \neq \{e\}\}$. Montrer que Y est stable par G.

b) On note $n = |Y/G|$ et $y_1, \ldots, y_n$ un système de représentants de Y/G. Pour tout i, on note m_i le cardinal de $\mathrm{Stab}_G(y_i)$. En considérant l'ensemble $Z := \{(g, x) \in (G \setminus \{e\}) \times X : g \cdot x = x\}$, montrer que

$$1 - \frac{1}{|G|} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

c) En déduire que $n = 1$.

d) Conclure.

Exercice 7 :

a) Soit G un p-groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note X^G l'ensemble des points fixes de X sous G. Montrer que
$$|X^G| \equiv |X| \text{ (mod. } p) \, .$$

b) Soit G un p-groupe agissant sur un ensemble fini X dont le cardinal n'est pas divisible par p. Montrer que X admet un point fixe sous G.

c) Soit G un p-groupe fini et $H \neq \{e\}$ un sous-groupe distingué de G. Montrer que l'intersection de H avec le centre de G n'est pas réduite à l'élément neutre.

d) Montrer qu'un groupe d'ordre p^n admet des sous-groupes d'ordre p^i pour tout $0 \leq i \leq n$.

e) Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. On souhaite montrer que p est somme de deux carrés d'entiers. On note
$$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x^2 + 4yz = p\} \, .$$

i) On définit $i : X \to X$ par les formules suivantes
$$i : (x, y, z) \mapsto \begin{array}{l} (x + 2z, z, y - x - z) \text{ si } x < y - z \, , \\ (2y - x, y, x - y + z) \text{ si } y - z < x < 2y \, , \\ (x - 2y, x - y + z, y) \text{ si } x > 2y \, . \end{array}$$
Vérifier que i est bien définie.

ii) Montrer que i est une involution et donc que cela définit une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur X.

iii) Montrer que i a un unique point fixe.

iv) Montrer que $|X|$ est impair.

v) Montrer que l'application $j : X \to X$ définie par $j(x, y, z) := (x, z, y)$ admet un point fixe.

vi) Conclure.

Exercice 8 : Soit G un groupe.

a) On suppose que G est fini et on note p le plus petit nombre premier divisant le cardinal de G. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

b) On suppose que G est infini et qu'il admet un sous-groupe strict H d'indice fini. Montrer que G n'est pas un groupe simple (i.e. G admet un sous-groupe distingué non trivial).

Exercice 9 : Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes finis admettant exactement n classes de conjugaison.