Algèbre géométrique - TD10

Exercice 1 : Soit G un sous-groupe fini de $SO(3,\mathbb{R})$. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, $T = S/G$ et $\pi : S \to T$ la projection canonique. Si $t = \pi(x)$, on note $s(t)$ le cardinal du stabilisateur de x et $c(t)$ le cardinal de l'orbite de x.

a) Montrer que $2|G| - 2 = \sum_{t\in T}(s(t)-1)c(t)$.

b) Quelles sont les valeurs possibles pour $s(t)$?

Exercice 2 : Soit $\mathbb{H}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $1, i, j, k$, muni de la loi de multiplication

$$(a1+bi+cj+dk)\cdot(e1+fi+gj+hk) = (ae-bf-cg-dh)1+(af+be+ch-dg)i+(ag+ce-bh+df)j+(ah+ed+bg-cf)k,$$

qui en fait une $\mathbb{R}$-algèbre associative (les quaternions). On note $\mathbb{H}^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{H}$.
Si $z = a1 + bi + cj + dk$, on note $\bar{z} = a1 - bi - cj - dk$.
On munit $\mathbb{H}$ de la norme euclidienne $\|a1 + bi + cj + dk\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. On note S la sphère unité de $\mathbb{H}$
On note $\mathbb{H}_0$ le sous-espace vectoriel engendré par i, j et k.

a) Vérifier que $\overline{zz'} = \overline{z'}\bar{z}$.

b) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{H}$, $z\bar{z} = \bar{z}z = (a^2+b^2+c^2+d^2)1$. En déduire que $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} - \{0\}$ et une expression pour z^{-1}.

c) Montrer que S est un sous-groupe de $\mathbb{H}^\times$.

d) Pour $q \in S(\mathbb{H})$, on note $\iota_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ défini par $\iota_q(h) = qhq^{-1}$. Montrer que ι_q est une isométrie directe de $\mathbb{H}$, qui stabilise $\mathbb{H}_0$.

e) Montrer que l'application $\iota : S(\mathbb{H}) \to SO(\mathbb{H}_0)$, définie par $\iota(q) = \iota_{q|\mathbb{H}_0}$ est un morphisme de groupe, et en déterminer le noyau.

f) Soit D une droite de H_0. Montrer que $\iota(S \cap (\mathbb{R}1 \oplus D))$ est constitué de rotations d'axe D.

g) En déduire que ι est surjective.

Géométrie du triangle

Exercice 3 : Soient $\mathcal{P}$ un plan euclidien, et A, B, C trois points distincts de $\mathcal{P}$. Soit I le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de rayon AI. Montrer que ABC est un triangle rectangle en C si et seulement si $C \in \mathcal{C}$.

Exercice 4 : Soient $\mathcal{P}$ un plan euclidien, $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r. Soit B un point à l'exterieur du cercle (c'est-à-dire $OB > r$). Montrer qu'il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par B.
Construire les points de tangence à la règle et au compas.

Exercice 5 : Soit ABC un triangle dans un plan euclidien $\mathcal{P}$. Soit G le centre de gravité de ABC, O le centre du cercle circonscrit de ABC et H l'orthocentre de ABC. Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -2. On note $A' = h(A)$, $B' = h(B)$ et $C' = h(C)$.

a) Montrer que A est le milieu de $B'C'$.

b) Montrer que les médiatrices de $A'B'C'$ coincident avec les hauteurs de ABC.

c) En déduire que $h(O) = H$ et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Exercice 6 : Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Soit ABC un triangle de $\mathcal{P}$, d'orthocentre H. Montrer que le symétrique orthogonal H' de H par rapport à la droite (AB) appartient au cercle circonscrit à ABC.

Exercice 7 : Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Soit ABC un triangle de $\mathcal{P}$ dont les angles sont tous aigus. Soient P un point de la droite (BC), Q un point de la droite (AC) et R un point de la droite (AB). On note Q_1 le symétrique orthogonal de P par rapport à (AC) et R_1 le symétrique orthogonal de P par rapport à (AB).

a) Montrer que $PQ + QR + RP \geq Q_1R_1 = 2AP|\sin(\widehat{BAC})|$.

b) Montrer que le périmètre de PQR est minimal quand P, Q et R sont les pieds des trois hauteurs du triangle ABC.

c) Montrer que $|\sin(\widehat{BAC})|/BC = |\sin(\widehat{ABC})|/AC = |\sin(\widehat{BCA})|/AB$.

Exercice 8 : Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Soit ABC un triangle non rectangle de $\mathcal{P}$, d'orthocentre H et de cercle circonscrit $\mathcal{C}$. Soit O le centre de $\mathcal{C}$

a) Montrer que $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

b) Soit J le projeté orthogonal de B sur (AC) et K le projeté orthogonal de C sur (AB). Montrer que la droite JK est parallèle à la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Exercice 9 : Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Soient ABC un triangle non rectangle de $\mathcal{P}$. Soient p la projection orthogonale sur (BC), q la projection orthogonale sur (AC) et r la projection orthogonale sur (AB).
Soient $I = p(A), J = q(B), K = r(C)$ et $M = q(I), N = r(I), P = r(J), Q = p(J), R = p(K), S = q(K)$.

a) Montrer que (BC) et (PS) sont parallèles.

b) Montrer que M, N, P, Q, R et S sont cocycliques.