Algèbre géométrique - TD4
Produits semi-directs

Exercice 1 : Soit G un groupe, N un sous-groupe distingué de G, H un sous-groupe de G. On suppose que G est produit semi-direct interne de N et de H (c'est-à-dire $G = NH$ et $N \cap H = \{1\}$). Soit $g \in G$ et $H' = gHg^{-1}$. Montrer que $G = N \rtimes H'$.

Exercice 2 : Soit G un groupe, N un sous-groupe distingué de G, H un sous-groupe de G tels que G soit produit semi-direct interne de N et de H. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) H est un sous-groupe distingué de G.

b) Pour tout $(h, n) \in H \times N$, $hn = nh$.

Exercice 3 : Soit $n \geq 2$. Soit $\mu_n = \{x \in \mathbb{C}; x^n = 1\}$. On regarde $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et on note D_n le groupe des applications $\mathbb{R}$-linéaires inversibles f de $\mathbb{C}$ tels que $f(\mu_n) = \mu_n$.

a) Construire une suite exacte $1 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to D_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$.

b) Vérifier que cette suite exacte est scindée.

c) Décrire D_n comme un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (on explicitera ϕ).

d) Décrire les sous-groupes distingués de D_n.

Exercice 4 : Soit K un corps, et $n \geq 1$. On considère la suite exacte :

$$1 \to \mathrm{SL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K) \overset{\det}{\to} K^\times \to 1$$

a) Justifier l'exactitude de la suite.

b) Montrer que la suite exacte et scindée, et en déduire une description de $\mathrm{GL}_n(K)$ en tant que produit semi-direct.

c) A quelle condition sur K et n $\mathrm{GL}_n(K)$ s'identifie-t-il au produit direct de $\mathrm{SL}_n(K)$ et d'un sous-groupe H de $\mathrm{GL}_n(K)$?

Exercice 5 : Soient E un ensemble fini, $\sim$ une relation d'équivalence sur E et soit $E = \coprod_{i \in I} E_i$ la partition de E en classe d'équivalences correspondante. On suppose que toutes les classes d'éuivalences ont le même cardinal. Soit $G = \{s \in S(E); \forall x, y \in E, x \sim y \implies s(x) \sim s(y)\}$. Construire une suite exacte scindée

$$1 \to \prod_{i \in I} S(E_i) \to G \to S(I) \to 1,$$

et en déduire une description de G comme produit semi-direct.