Algèbre géométrique - TD 5
Espaces projectifs

Exercice 1 :

a) Soient trois points A, B et C sur $\mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ comme sur la figure 1a). Redessiner la figure 1a) après avoir envoyé à l'infini
- le point A,
- le point B,
- le point C,
- un point sur le segment $[BC]$.

b) Soient 4 droites (AB), (BC), (AC) et (DE) dans $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ comme sur la figure 1b). Redessiner la figure 1b) après avoir envoyé à l'infini
- le point F seulement,
- la droite (BC),
- la droite (AC),
- la droite (AE).

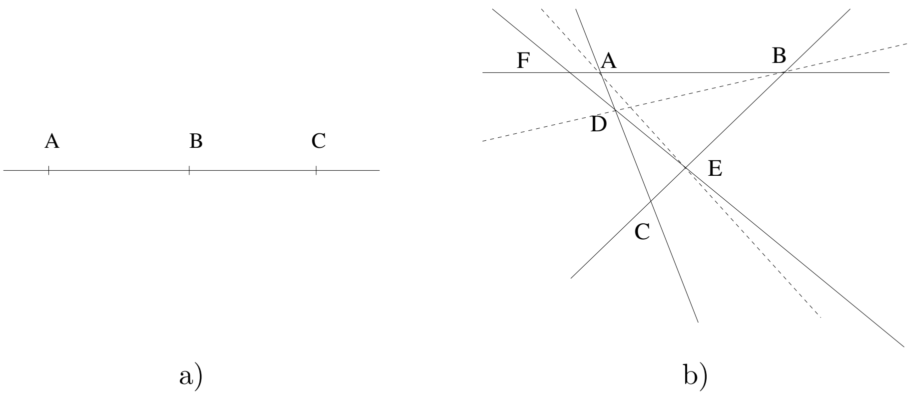

FIGURE 1 –

Exercice 2 :

Soit V un k-espace vectoriel. Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ tels que $\dim(W_1) + \dim(W_2) \geq \dim \mathbb{P}(V)$.

a) Montrer que $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace projectif non vide de $\mathbb{P}(V)$ des deux manières suivantes :
   i) en utilisant la définition de $\mathbb{P}(V)$ comme l'ensemble des droites vectorielles de V,
   ii) en utilisant l'expression d'un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ par un système d'équations.

b) Que dire de $\dim(W_1 \cap W_2)$?

c) Que dire des résultats des questions a) et b) si l'hypothèse initiale sur les dimensions n'est pas vérifiée ?

Exercice 3 :

Donner des conditions nécessaires et suffisantes en termes de coordonnées homogènes pour que

a) $n+1$ points de $\mathbb{P}^n(K)$ soient inclus dans un hyperplan projectif,

b) $n+1$ hyperplans de $\mathbb{P}^n(K)$ soient concourants,

c) un point de coordonnées homogènes $[x_0 : \ldots : x_n]$ de $\mathbb{P}^n(K)$ soit dans l'hyperplan projectif engendré par les points de coordonnées homogènes $[a_{1,0} : \ldots : a_{1,n}], \ldots, [a_{n,0} : \ldots : a_{n,n}]$.

Exercice 4 :
Soient $A_0 \dots, A_{n+1}$ des points d'un espace projectif E de dimension n sur un corps K tels que $n+1$ quelconques d'entre eux ne soient jamais sur un hyperplan de E.

a) Montrer qu'il existe un système de coordonnées homogènes sur E où les coordonnées des A_i sont :
$$A_0 : [1 : 0 : \dots : 0], \quad A_1 : [0 : 1 : 0 : \dots : 0], \quad \dots$$
$$A_n : [0 : \dots : 0 : 1] \quad \text{et } A_{n+1} : [1 : \dots : 1].$$

b) Soient $v_0 = (b_{0,0}, \dots, b_{0,n}), \dots, v_{n+1} = (b_{n+1,0}, \dots, b_{n+1,n})$ des vecteurs de K^{n+1} tels que $n+1$ quelconques d'entre eux soient toujours linéairement indépendants. Montrer qu'il existe un système de coordonnées homogènes sur E où les coordonnées des A_i sont :
$$A_i : [b_{i,0} : \dots : b_{i,n}].$$

Exercice 5 :
Dans un plan projectif réel, on considère 3 points non alignés A, B et C. Soit I un point qui n'est pas sur les droites (AB), (AC) et (BC). Soient A', B' et C' les points d'intersections de, respectivement, (BC) et (AI), (AC) et (BI), et enfin (AB) et (CI). Soient $P := (BC) \cap (B'C')$, $Q := (CA) \cap (C'A')$ et $R := (AB) \cap (A'B')$.

a) Montrer analytiquement (en utilisant les exercices 3 et 4) que les points P, Q et R sont alignés.

b) Montrer géométriquement que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 6 :
On note π la projection naturelle de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. On note π' la restriction de l'application π à la sphère $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $\sum_{i=0}^n x_i^2 = 1$.

a) Rappeler la définition de la topologie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

b) Montrer que l'application π' est surjective sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) est compact.

c) Montrer que pour tout point x de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, l'ensemble $\pi'^{-1}(x)$ est constitué de deux vecteurs opposés (c'est à dire v et $-v$) dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

d) En déduire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est la sphère $\mathbb{S}^n$ où l'on identifie les points diamétralement opposés.

e) Soit $\mathbb{D}^n$ le disque dans $\mathbb{R}^n$ d'équation $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1$. Déduire de la question précédente que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est le disque $\mathbb{D}^n$ où l'on identifie les points diamétralement opposés du bord.

f) Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.

g) Montrer aussi que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est obtenu en recollant un disque $\mathbb{D}^2$ sur le bord d'un ruban de Möbius. (On peut en déduire assez facilement que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^2$).

h) Montrer que l'on a un homéomorphisme
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 ,$$
et que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^2$.

Exercice 7 :

a) Quel est le cardinal de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ ($\mathbb{F}_q$ désigne un corps fini à q éléments) ?

b) Représenter le plan projectif sur les corps $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_5$, avec tous les points et toutes les droites, en respectant les relations d'incidence. Essayer de représenter $\mathbb{P}^3(\mathbb{F}_2)$.

Exercice 8 :
Soit q une puissance d'un nombre premier et $n \geq 2$.

a) Construire un morphisme de groupes injectif canonique $\varphi : \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q) \to \mathfrak{S}_N$, avec $N := \frac{q^n-1}{q-1}$.

b) Déterminer la structure du groupe fini $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ pour $n = 2$ et $q = 2, 3, 4, 5$.

Exercice 9 :
On trouve dans le commerce un jeu de cartes appelé "Dobble", dont les caractéristiques principales sont les suivantes :
– le jeu comporte 55 cartes.
– sur chaque carte sont dessinés 8 symboles différents.
– deux cartes quelconques du jeu ont toujours exactement un symbole en commun.
Expliquer la construction d'un tel jeu, déterminer le nombre total de symboles nécessaires, et discuter de variantes (nombre de cartes, nombre de symboles par carte, nombre de symboles communs à deux cartes, etc...).

Exercice 10 :
Soit $D = \mathbb{P}(V)$ une droite projective et $1 \leq n \leq 4$. On note $D^{[n]}$ l'ensemble des n-uplets de points deux-à-deux distincts de D. On a une action naturelle du groupe projectif $\mathrm{PGL}(V)$ de D sur $D^{[n]}$. Décrire le quotient $D^{[n]}/\mathrm{PGL}(V)$, i.e. l'ensemble des orbites de cette action.

Exercice 11 : Soient cinq points distincts A, B, C, D, E d'une droite projective. Calculer

$$[A, B, C, D][A, B, D, E][A, B, E, C].$$

Exercice 12 : Soient D et D' deux droites d'un plan projectif qui se coupent en A. On se donne 3 points P, Q et R sur D et 3 points P', Q' et R' sur D'. Montrer que les droites (PP'), (QQ') et (RR') sont concourantes si et seulement si $[A, P, Q, R] = [A, P', Q', R']$.

Exercice 13 : On se donne la configuration de la figure 2 dans un plan projectif.

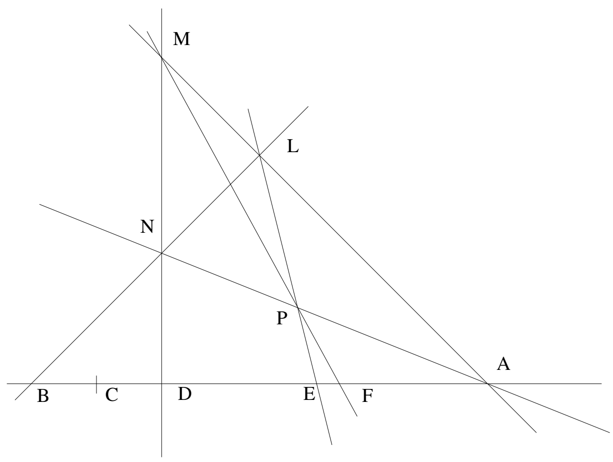

Figure 2 –

a) Dessiner la configuration affine correspondante dans le plan affine obtenue en plaçant la droite (LM) à l'infini.

b) On se place dans le repère projectif où

$$A = [1 : 0 : 0], \quad B = [0 : 1 : 0], \quad L = [0 : 0 : 1], \quad \text{et} \quad C = [1 : 1 : 0].$$

Déterminer les équations des droites (BL), (DM), (NA), (LE) et (MP), ainsi que les coordonnées homogènes des points $N = (BL) \cap (DM)$, $P = (NA) \cap (LE)$ et $F = (AB) \cap (MP)$ en terme des coordonnées homogènes des points D, E et M.

c) Exprimer le birapport $[A, B, C, F]$ en fonction des birapports $x = [A, B, C, D]$ et $y = [A, B, C, E]$.

Exercice 14 :

a) Étudier l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ sur le birapport de quatre points.

b) Soient a, b, c, d, p, q, r, s huit points distincts d'une droite projective. Montrer la formule des six birapports
$$[a, b, c, d][a, r, d, p][a, q, p, c][s, c, q, b][s, p, r, q][s, d, b, r] = 1\,.$$

Exercice 15 :

a) Soient d_1, d_2, d_3 et d_4 quatre droites concourantes d'un plan projectif. Soit d une droite qui coupe les quatre droites. Soit $A_i = d \cap d_i$. Montrer que le birapport $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ est indépendant de la droite d. On l'appelle birapport des droites d_i et on le note $[d_1, d_2, d_3, d_4]$.

b) On note m le point d'intersection des droites d_i et m^* sa droite duale. Montrer que $[d_1, d_2, d_3, d_4]$ est en fait égal au birapport des quatre points d_i^* sur la droite m^*.

Exercice 16 :

Dans un plan projectif, soient un triangle ABC, une droite d ne passant pas par ses sommets et trois points distincts P, Q et R de d. Soient P', Q' et R' les points d'intersection de d avec les droites (BC), (CA) et (AB). Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement s'il existe une homographie involutive de d qui envoie P sur P', Q sur Q' et R sur R'.
On pourra commencer par montrer la caractérisation suivante : si A_1, A_2, A_3 sont trois points distincts d'une droite projective, et si h est une homographie de cette droite, alors h est une involution si et seulement si pour tout $i = 1, 2, 3$, $[A_1, A_2, A_3, h(A_i)] = [h(A_1), h(A_2), h(A_3), A_i]$.

Exercice 17 :

a) Montrer que le groupe des homographies $\mathrm{PGL}(V)$ agit simplement transitivement sur les repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.

b) Soient K, L des corps, V (resp. W) un K-espace vectoriel (resp. un L-espace vectoriel) de dimension ≥ 3. Montrer que toute bijection $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ qui envoie chaque droite projective de $\mathbb{P}(V)$ sur une droite projective de $\mathbb{P}(V)$ provient d'un isomorphisme σ-linéaire $\varphi : V \to W$ pour un isomorphisme de corps $\sigma : K \to L$ (on dit aussi que ϕ est une semi-homographie).

c) Quels sont les bijections de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ préservant l'alignement ? Le même résultat reste-t-il valable pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$?

d) Montrer qu'une injection entre droites projectives préserve le birapport si et seulement si c'est une homographie.

e) Soit $H \subset V$ un hyperplan. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)$.

   i) Soit f une forme linéaire sur V telle que $H = \ker(f)$. Montrer que $\mathcal{H}$ est en bijection canonique avec le sous-espace affine de V :
   $$H_f := \{v \in V : f(v) = 1\}\,.$$
   Cela munit $\mathcal{H}$ d'une structure d'espace affine de direction H (structure dépendant de f).

   ii) Comparer les structures d'espaces affines sur $\mathcal{H}$ ainsi obtenues pour deux choix de formes linéaires f et g telles que $H = \ker(f) = \ker(g)$. En particulier, montrer que les sous-espaces affines de $\mathcal{H}$ pour les deux structures sont les mêmes et que la notion de points alignés est la même pour ces deux structures.

   iii) Munir $\mathcal{H}$ d'une structure canonique d'espace affine de direction $\mathrm{Hom}(V/H, H)$. La comparer avec les précédentes.

   iv) Montrer qu'il y a une bijection naturelle entre les sous-espaces linéaires de $\mathbb{P}(V)$ non contenus dans $\mathbb{P}(H)$ et les sous-espaces affines de $\mathcal{H}$. Vérifier que cette bijection respecte les dimensions et l'alignement. Est-ce qu'elle respecte le parallélisme ?

   v) Montrer que tout transformation affine de $\mathcal{H}$ se prolonge en une unique homographie de $\mathbb{P}(V)$. Et réciproquement, vérifier que toute homographie de $\mathbb{P}(V)$ laissant stable l'hyperplan $\mathbb{P}(H)$ induit une bijection affine de $\mathcal{H}$.

Exercice 18 :
Soit K un corps.
Montrer que les homographies sont exactement les K-automorphismes du corps $K(T)$ (les automorphismes de $K(T)$ dont la restriction à K est l'identité), i.e. que $\mathrm{Aut}_K(K(T)) \cong \mathrm{PGL}_2(K)$.

Exercice 19 : Dans un plan projectif, soient d une droite et A, B deux points hors de d. Pour chaque choix de deux points M et M' sur d, on considère la droite Δ passant par les points $(MA) \cap (M'B)$ et $(M'A) \cap (MB)$. Montrer qu'il existe un point par lequel passent toutes les droites Δ.

Exercice 20 :

a) On dessine sur une feuille deux droites D et D' se coupant en dehors de la feuille, et un point M qui n'est ni sur D, ni sur D'. Comment construire la droite qui joint M au point d'intersection de D et D' ?

b) On veut tracer la droite joignant deux points donnés P et Q, en disposant d'une règle trop courte. Pour ceci, on trace une droite D "à mi-chemin" entre P et Q, et on cherche à construire le point d'intersection de D avec (PQ) (sans tracer (PQ)). Comment faire ?