Algèbre géométrique - TD7

Exercice 1 : Calculer la signature des formes quadratiques réelles suivantes :

a) $q : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $q(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$;

b) $q : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $q(P) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(k)P(-k)e^{-k}$.

Exercice 2 : Soit k un corps fini (de caractéristique différente de 2).

a) Montrer que l'ensemble $k^{\times 2}$ des carrés de $k^\times$ est un sous-groupe d'indice 2 de $k^\times$.

b) Montrer que si $a, b \in k^\times$, alors il existe $x, y \in k^\times$ tels que $1 = ax^2 + by^2$.

c) Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe exactement deux classes d'isomorphisme de formes quadratiques non dégénérées sur V (q_1 et q_2 sont dites isomorphes s'il existe $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $q_2 = q_1 \circ \phi$).

d) On considère la forme quadratique sur $\mathbb{F}_5^2$ donnée par $q(x, y) = 2x^2 + 4xy$. Donner une base orthonormée de q.

Exercice 3 :
Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, V un K-espace vectoriel de dimension n, Q une forme quadratique non dégénérée sur V et ϕ sa forme polaire.

a) Si $\dim(E) = d$, quelle est la dimension de $E^\perp$? Et que peut-on dire de $(E^\perp)^\perp$?

b) Montrer que le noyau $N(Q_E)$ est égal à $E \cap E^\perp$.

c) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) Q_E est non dégénérée ; (b) $V = E \oplus E^\perp$. De plus, sous ces conditions, montrer que $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de V est *anisotrope* s'il ne contient aucun vecteur isotrope non nul. On suppose que V n'est *pas* anisotrope.

d) Soit u un vecteur isotrope non nul. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope v tel que $\phi(u, v) = 1$.

e) Soit P le plan vectoriel engendré par u et v. Montrer que Q_P est non dégénérée. On dira que P est un plan *hyperbolique* et que (u, v) en est une base hyperbolique.

f) Montrer que V est somme directe orthogonale de plans hyperboliques $P = P_1, \ldots, P_r$ (pour un entier $r \geq 1$) et d'un sous-espace anisotrope F.

g) Soit F un sous-espace vectoriel de V de dimension 2. Montrer que F est un plan hyperbolique si et seulement si il possède une base orthogonale (e_1, e_2) telle que $Q(e_1) = 1 = -Q(e_2)$.

On suppose que $K = \mathbb{R}$.

h) Supposons que V soit somme directe orthogonale de r plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive. Déterminer alors la signature (p, q) de Q.

i) Réciproquement, si Q est de signature (p, q), avec $p \geq q > 0$, montrer que V est la somme directe orthogonale de r plans hyperboliques et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive, pour des entiers $r > 0$ et $f \geq 0$ que l'on exprimera en fonction de p et q.

Exercice 4 : Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, muni d'une forme quadratique $q : V \to k$. Un sous-espace vectoriel $H \subset V$ est dit totalement isotrope si $q(x) = 0$ pour tout $x \in H$.

a) Montrer que tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux ont la même dimension (si A et B sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux, on pourra considérer des supplémentaires A' et B' de $A \cap B$ dans A et B respectivement, et montrer que $A + (A'^\perp \cap B')$ est totalement isotrope).

b) Que vaut cette dimension quand $k = \mathbb{R}$ et q est de signature (p, r) ?

Exercice 5 : Soient V un k-espace vectoriel, muni d'une base $\mathcal{B}$ et soient q_1, q_2 deux formes quadratiques sur V. On suppose q_1 non dégénérée. Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_1)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_2)$.
Montrer que q_1 et q_2 sont réductibles dans une même base si et seulement si $A^{-1}B$ est diagonalisable.