Sorbonne Université | 4M001 2018-2019
Master 1 Mathématiques | E. Lepage, A. Oancea

Devoir No. 1 du 5 octobre 2018
À rendre le 12 octobre 2018

Exercice 1. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application qui préserve les barycentres, c'est-à-dire

$$\varphi\big(Barycentre((P_1, p_1), \dots, (P_m, p_m))\big) = Barycentre\big((\varphi(P_1), p_1), \dots, (\varphi(P_m), p_m)\big)$$

pour tous $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{E}$ et $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_i p_i = 1$.

Montrer que φ est affine.

Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{R}$ par un corps quelconque $\mathbb{K}$?

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n sur $\mathbb{R}$. Soit $A \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble. L'on rappelle les notations suivantes :

- Conv(A) désigne l'enveloppe convexe de A, c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{E}$ qui est convexe et contient A.
- $Aff(A)$ désigne l'enveloppe affine de A, c'est-à-dire le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ qui contient A.

1. Montrer que $Conv(A) \subset Aff(A)$. Donnez un exemple où cette inclusion est stricte. Montrer que
$$Conv(Aff(A)) = Aff(Conv(A)) = Aff(A).$$

2. Montrer l'égalité
$$Aff(A) = \{p_1 P_1 + \cdots + p_\ell P_\ell \ : \ P_1, \dots, P_\ell \in A,\ p_1, \dots, p_\ell \in \mathbb{R},\ \sum_i p_i = 1\}.$$

L'on note ici $p_1 P_1 + \cdots + p_\ell P_\ell = Barycentre((P_1, p_1), \dots, (P_\ell, p_\ell))$.

L'on note $k \leqslant n$ la dimension de $Aff(A)$.

3. Montrer qu'il existe un repère affine $(P_0, \dots, P_k)$ de $Aff(A)$ constitué de points de A. L'on pourra par exemple montrer que tout système maximal de points de A qui sont affinement indépendants constitue un repère de $Aff(A)$.

4. Montrer que tout point de $Conv(A)$ est combinaison convexe d'au plus $k+1$ points de A.