Sorbonne Université
Master 1 Mathématiques

4M001 2018-2019

E. Lepage, A. Oancea

Devoir No. 2 du 30 novembre 2018
À rendre le 6 décembre 2018

Le but de ce devoir est de démontrer le théorème de Chasles-Steiner suivant :

Soit Γ une conique lisse dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points 2 à 2 distincts de Γ. Pour tout point M de Γ, le birapport des quatre droites (MP_1), (MP_2), (MP_3), (MP_4) ne dépend pas de M.

Par convention, pour $M = P_i$ l'on pose $(MP_i) = T_{P_i}\Gamma$, la tangente à Γ en P_i.

Partie 1

Soit M un point de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et Σ_0, Σ_1 deux droites distinctes passant par M. Fixons des équations

$$\Sigma_0 = \{L_0 = 0\}, \qquad \Sigma_1 = \{L_1 = 0\},$$

avec $L_0, L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ deux formes linéaires non-nulles.

1. Montrer que L_0 et L_1 ne sont pas proportionnelles.

2. Notons M^* l'ensemble des droites projectives qui passent par M (on l'appelle aussi *faisceau des droites passant par M*). Montrer que l'application

$$\Phi = \Phi_{\Sigma_0,\Sigma_1} : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow M^*, \qquad [a : b] \mapsto \{aL_0 + bL_1 = 0\}$$

est bijective.

3. L'on rappelle que le birapport $[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4]$ de quatre droites distinctes Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 passant par M est défini comme suit : l'on choisit une droite Δ ne contenant pas M, l'on pose $P_i = \Delta \cap \Delta_i$ et l'on définit

$$[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4] = [P_1, P_2, P_3, P_4] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}).$$

Cette quantité ne dépend pas du choix de Δ.

Montrer que l'application Φ préserve le birapport. *Indication : l'on pourra choisir sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ un repère projectif tel que $[1 : 0 : 0] = M$, $[0 : 1 : 0] \in \Sigma_0$, $[0 : 0 : 1] \in \Sigma_1$ et l'on pourra choisir Δ comme étant la droite déterminée par les points $[0 : 1 : 0]$ et $[0 : 0 : 1]$. Puisque M^* s'identifie naturellement à Δ, il s'agit de montrer que Φ est une homographie par un calcul explicite.*

4. Montrer que, si l'on remplace la paire (Σ_0, Σ_1) par une autre paire (Σ_0', Σ_1'), alors

$$\Phi^{-1}_{\Sigma_0',\Sigma_1'} \circ \Phi_{\Sigma_0,\Sigma_1} : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$$

est une homographie.

Partie 2

1. Soit $M \in \Gamma$. Montrer que l'application

$$\psi_M : M^* \to \Gamma, \qquad \Delta \mapsto \begin{cases} \Delta \cap \Gamma \backslash \{M\}, & \Delta \neq T_P\Gamma, \\ M, & \Delta = T_P\Gamma \end{cases}$$

est une bijection.

2. Soient M, M' deux points distincts sur Γ. L'on choisit des identifications

$$\Phi_M : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} M^*, \qquad \Phi_{M'} : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} (M')^*$$

comme dans la partie 1 et l'on note

$$\phi_M = \psi_M \Phi_M, \qquad \phi_{M'} = \psi_{M'} \Phi_{M'}.$$

Montrer que la conclusion du théorème de Chasles-Steiner découle si on montre que

$$\phi_{M'}^{-1} \phi_M : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$$

est une homographie.

3. Choisissons un repère tel que $M = [0 : 1 : 0]$, $M' = [1 : 0 : 0]$, $N' = [1 : 1 : 1] \in \Gamma$ et

$$N = [0 : 0 : 1] = T_M\Gamma \cap T_{M'}\Gamma.$$

L'on note $[X_0 : X_1 : X_2]$ les coordonnées correspondantes sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $T_M\Gamma = \{X_0 = 0\}$ et $T_{M'}\Gamma = \{X_1 = 0\}$.

(b) En déduire que l'équation de Γ dans ce repère est $\Gamma = \{X_0X_1 - X_2^2 = 0\}$.

(c) i. Choisissons dans M^* les droites de référence $\Sigma_0 = \{X_0 = 0\}$ et $\Sigma_1 = \{X_2 = 0\}$. Montrer que $\phi_M : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \Gamma$ est donnée par la formule

$$\phi_M([\lambda : \mu]) = [\mu^2 : \lambda^2 : -\lambda\mu].$$

ii. Choisissons dans $(M')^*$ les droites de référence $\Sigma'_0 = \{X_1 = 0\}$ et $\Sigma'_1 = \{X_2 = 0\}$. Montrer que $\phi_{M'} : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \Gamma$ est donnée par la formule

$$\phi_{M'}([\lambda' : \mu']) = [(\lambda')^2 : (\mu')^2 : -\lambda'\mu'].$$

(d) Donner la formule pour $\phi_{M'}^{-1} \circ \phi_M$ et conclure.