

Algèbre géométrique - TD1 Groupes

Exercice 1 : Soient $\mu_n = \{z \in \mathbb{C}^\times; z^n = 1\}$, $\mu_\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mu_n$, $S = \{z \in \mathbb{C}^\times; |z| = 1\}$. Ce sont des sous-groupes de \mathbb{C}^\times pour la multiplication.

- Construire des isomorphismes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n$; $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S$; $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \mu_\infty$; $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0} \simeq S$; $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \simeq S$; $S/\mu_n \simeq S$; $\mathbb{C}^\times/\mu_n \simeq \mathbb{C}^\times$.
- Montrer que tout sous-groupe fini de μ_∞ est de la forme μ_n .

Exercice 2 : Soit G un groupe agissant sur lui-même par translation à gauche : $g \cdot h = gh$.

- Montrer que l'action est libre et transitive.
- Réciproquement, soit X muni d'une action libre et transitive de G . Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une unique bijection G -équivariante $f_x : X \rightarrow G$ telle que $f(x) = 1$ (une application $f : X \rightarrow X'$ entre ensembles muni d'une action d'un même groupe G est dite équivariante si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$).

Exercice 3 : Soient X un ensemble fini et G un groupe fini agissant sur X . Soit $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ un système de représentants de X/G (ainsi $n = |X/G|$). Montrer la "formule des classes" :

$$\frac{|X|}{|G|} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\text{Stab}(x_i)|}.$$

Exercice 4 :

- Montrer que si G est un groupe fini et H un sous-groupe strict de G , alors la réunion des conjugués de H n'est pas égale à G tout entier. Que dire si le groupe G est infini et si H est d'indice fini dans G ? Et si on suppose seulement G infini?
- Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini X tel que $|X| \geq 2$. Montrer qu'il existe $g \in G$ ne fixant aucun point de X .

Exercice 5 : Soit K un corps et V un K -espace vectoriel de dimension finie n . On note B l'ensemble des bases de V , $G = GL(V)$ et $X := \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in V^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in B\}$.

- Montrer que le groupe G agit naturellement sur les ensembles B et X .
- Montrer que l'action de G sur B est libre et transitive.
- Montrer que l'application naturelle $X \rightarrow K^n$ qui à \underline{x} associe les coordonnées de x_{n+1} dans la base (x_1, \dots, x_n) est constante sur les G -orbites.
- En déduire une description du quotient X/G .
- On considère maintenant l'action de G sur $\text{End}(V)$ par multiplication à gauche (resp. à droite). Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que deux endomorphismes de V soient dans la même orbite sous G .

Exercice 6 : Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . En considérant l'ensemble

$$E := \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\},$$

calculer le nombre moyen de points fixes d'un élément de G . Que dire en particulier si l'action est transitive?

Exercice 7 : Soit G un groupe.

- a) On suppose que G est fini et on note p le plus petit nombre premier divisant le cardinal de G . Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.
- b) On suppose que G est infini et qu'il admet un sous-groupe strict H d'indice fini. Montrer que G n'est pas un groupe simple (i.e. G admet un sous-groupe distingué non trivial).

Exercice 8 : Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes finis admettant exactement n classes de conjugaison.

Exercice 9 : Soit G un groupe, N un sous-groupe distingué de G , H un sous-groupe de G tels que $G = N \rtimes H$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) H est un sous-groupe distingué de G .
- b) Pour tout $(h, n) \in H \times N$, $hn = nh$.

Exercice 10 : Soit $n \geq 2$. Soit $\mu_n = \{x \in \mathbb{C}; x^n = 1\}$. On regarde \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, et on note D_n le groupe des applications \mathbb{R} -linéaires inversibles f de \mathbb{C} tels que $f(\mu_n) = \mu_n$.

- a) Vérifier que si $f \in D_n$ vérifie $f(1) = 1$, alors $f(e^{2i\pi/n}) = e^{2i\pi/n}$ ou $e^{-2i\pi/n}$.
- b) Construire une suite exacte $1 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow D_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$.
- c) Vérifier que cette suite exacte est scindée.
- d) Décrire D_n comme un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (on explicitera ϕ).
- e) Si n divise m , construire un morphisme de groupe surjectif $D_m \rightarrow D_n$.

Exercice 11 : Combien y a-t-il de colliers de perles différents formés de 4 perles rouges, 3 perles bleues et 2 perles jaunes ?

Exercice 12 : Soit D_{∞} l'ensemble des bijections monotones $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

- a) Montrer que D_{∞} contient un sous-groupe H d'indice 2 isomorphe à \mathbb{Z} .
- b) En déduire une suite exacte $1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow D_{\infty} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$ et montrer que la suite est scindée.
- c) Montrer que tout sous-groupe de H est distingué dans D_{∞} .
- d) Soit $n \geq 1$ et nH l'unique sous-groupe de H d'indice n . Construire un isomorphisme $D_{\infty}/nH \rightarrow D_n$.

Exercice 13 : Soit $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}^{\times}, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b\}$.

- a) Montrer que G est un groupe pour la composition.
- b) Construire une suite exacte scinde $1 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{R}^{\times} \rightarrow 1$.

Exercice 14 : Soit K un corps, et $n \geq 1$. On considère la suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathrm{SL}_n(K) \rightarrow \mathrm{GL}_n(K) \xrightarrow{\det} K^{\times} \rightarrow 1$$

- a) Justifier l'exactitude de la suite.
- b) Montrer que la suite exacte est scindée, et en déduire une description de $\mathrm{GL}_n(K)$ en tant que produit semi-direct.
- c) A quelle condition sur K et n $\mathrm{GL}_n(K)$ s'identifie-t-il au produit direct de son sous-groupe distingué $\mathrm{SL}_n(K)$ par un sous-groupe H de $\mathrm{GL}_n(K)$ (c'est-à-dire $H \rightarrow \mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(K)$ est un isomorphisme) ?