Algèbre géométrique - TD2
Espaces affines

Exercice 1 :

a) Montrer que l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que le vecteur $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ soit fixe par A, est un espace affine ; en déterminer un point et l'espace vectoriel sous-jacent.

b) Montrer que l'ensemble des applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, vérifiant $y'(x) = y(x) + x^2 - 5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, est un espace affine, dont on déterminera un point et l'espace vectoriel associé.

c) Montrer que l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est un espace affine, dont on déterminera un point et l'espace vectoriel associé.

Exercice 2 : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, $A, B \in \mathcal{E}$, $\lambda, \mu \in k^*$. On souhaite déterminer explicitement l'application affine $f := h(\lambda, A) \circ h(\mu, B)$.

a) On suppose $\lambda\mu = 1$. Montrer que f est la translation de vecteur $(\lambda - 1)\overrightarrow{AB}$.

b) On suppose $\lambda\mu \neq 1$. Montrer que $f = h(C, \lambda\mu)$, où C est l'unique point de $\mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{BC} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda\mu}\overrightarrow{BA}$.

c) On note H l'ensemble formé des homothéties et des translations de $\mathcal{E}$. Montrer que H est un sous-groupe du groupe des transformations affines de $\mathcal{E}$. Le groupe H est-il commutatif ? Est-il distingué dans le groupe des transformations affines ? Si oui, quel en est le quotient ?

d) On va montrer maintenant que les éléments de H sont exactement les transformations affines de $\mathcal{E}$ telles que tout droite de $\mathcal{E}$ a pour image une droite parallèle. Soit f une telle transformation.

   i) Soit $x \in \mathcal{E}$. Montrer que si $f(x) = x$, alors toute droite passant par x est globalement invariante.

   ii) On suppose maintenant que f admet au moins deux points fixes distincts x et y dans $\mathcal{E}$. Montrer alors que $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

   iii) On suppose que f admet un unique point fixe x. Montrer que f est une homothétie de centre x.

   iv) On suppose que f n'admet pas de point fixe. Soit $x \in \mathcal{E}$ et soit $v := \overrightarrow{f(x)x}$. Étudier $t_v \circ f$ et en déduire la nature de f.

   v) Conclure.

Exercice 3 :

a) Soient D et D' deux droites d'un plan affine $\mathcal{P}$, sécantes en un point C. Soient A, B deux points de D, et A', B' deux points de D'. Montrer qu'il existe deux homothéties h et h' de même centre C telles que $h(A) = B$ et $h'(A') = B'$. Quels sont leurs rapports ?

b) En introduisant la projection affine π sur D' parallèlement à la droite (AA'), démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes (théorème de Thalès) :

   i) $(AA') \parallel (BB')$.

   ii) $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C}}{\overrightarrow{B'C}}$.

   iii) $h = h'$.

c) Soient D et D' deux droites distinctes du plan affine $\mathcal{P}$. Soient A, B, C trois points de D et A', B', C' trois points de D'. Montrer que si $(AB') \parallel (BA')$ et $(BC') \parallel (CB')$, alors $(AC') \parallel (CA')$ (théorème de Pappus).

Exercice 4 :
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun dont les côtés sont deux à deux parallèles ($(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \parallel (B'C')$ et $(CA) \parallel (C'A')$). Montrer que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles (théorème de Desargues).

Exercice 5 :
Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine $\mathcal{P}$. Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ tels que $\overrightarrow{A'B} = \alpha\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{B'C} = \beta\overrightarrow{B'A}$ et $\overrightarrow{C'A} = \gamma\overrightarrow{C'B}$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in k$. On note h_1, h_2, h_3 les homothéties de centres respectifs A', B', C' et de rapports respectifs α, β, γ.

a) On pose $\varphi := h_1 \circ h_2 \circ h_3$. Vérifier que $\varphi(A') \in (BC)$.

b) Montrer que si A', B', C' sont alignés sur une droite D, alors $\varphi(D) = D$. En déduire qu'alors $\varphi(A') = A'$ et calculer $\alpha\beta\gamma$.

c) Supposons que $\alpha\beta\gamma = 1$. Montrer que $h_2 \circ h_3$ est une homothétie dont le centre appartient à $(B'C')$. En déduire que $A' \in (B'C')$.

d) Conclure que A', B', C' sont alignés si et seulement si $\alpha\beta\gamma = 1$ (théorème de Ménélaüs).

Exercice 6 : Un quadrilatère complet est une configuration plane de quatre droites deux-à-deux sécantes, dont trois ne sont jamais concourantes. Les sommets sont les six points de concours. Les diagonales sont les trois segments qui relient deux sommets qui ne sont pas sur une même droite.
Montrer en utilisant le théorème de Ménélaüs (cf exercice 5) que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés. (On pourra considérer le triangle formé des milieux de trois des côtés du quadrilatère complet.)

Exercice 7 :

a) Quelles sont les applications affines commutant avec toutes les translations ?

b) Les symétries (resp. les projections) affines sont-elles les applications affines dont la partie linéaire est une symétrie vectorielle (resp. une projection) ?

c) Les symétries (resp. projections) affines sont-elles les involutions affines (resp. les applications affines f vérifiant $f \circ f = f$) ?

Exercice 8 :

a) Démontrer que l'application (linéaire) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, qui admet la représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$, est une projection que l'on précisera.

b) Déterminer la nature des applications affines $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies dans le repère canonique par

$$\varphi_1 : (x, y) \mapsto \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 1, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - 1\right),$$

$$\varphi_2 : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right).$$

c) Déterminer la nature des applications affines $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies dans le repère canonique par

$$\varphi_3 : (x, y, z) \mapsto \left(-\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}y + z - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - z - \frac{1}{2}, -3x - 3y + z - 3\right),$$

$$\varphi_4 : (x, y, z) \mapsto \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 3, -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 3, \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + z - 3\right).$$