Algèbre géométrique - TD4
Convexité

Pour les exercices 4, 5 et 6, un point x d'une partie convexe C d'un espace affine est appelé un point extrémal de C si pour tout $a, b \in C$ et pour tout $t \in]0,1[$ tels que $x = ta + (1-t)b$, alors $a = b = x$.

Exercice 1 :

a) Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que tout élément de $\mathrm{Conv}(X)$ est barycentre à coefficients positifs d'au plus $n+1$ points de X.

b) En déduire que l'enveloppe convexe d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

c) L'enveloppe convexe d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ est-elle fermée ?

Exercice 2 :
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Exercice 3 :

a) Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe borné contenant 0 dans son intérieur. On définit $\rho_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ par $\rho_C(x) := \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}$.

  i) Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $\rho_C(\lambda x) = \lambda \rho_C(x)$.

  ii) Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) \leq 1\}$.

  iii) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\rho_C(x+y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y)$.

  iv) Montrer que ρ_C est continue.

  v) Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) = 1\} = \partial C$, que $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) < 1\} = \mathrm{Int}(C)$ et que $\{x \in \mathbb{R}^n : \rho_C(x) \leq 1\} = \overline{C}$.

  vi) Montrer que l'application $x \mapsto \frac{\rho_C(x)}{\|x\|} x$ définit un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ identifiant l'intérieur de C avec la boule unité ouverte et la frontière de C avec la sphère unité.

b) À quelle condition un convexe compact est-il homéomorphe à la boule unité fermée ?

Exercice 4 : Soient E un espace affine de dimension finie n, C un convexe compact de E et S l'ensemble des points extrémaux de C. On cherche montrer que C est l'enveloppe convexe de S (théorème de Krein-Milman).

a) Supposons $n \geq 1$ et supposons le théorème de Krein-Milman vrai en dimension $n-1$.

  i) Soit $x \in C$ et soit D une droite passant par x. Montrer que x s'crit comme barycentre convexe de deux points de $D \cap \partial C$.

  ii) Soit $x \in \partial C$. Soit H un hyperplan d'appui de C passant par x, c'est-à-dire, $H = l^{-1}(0)$, où $l : E \to \mathbb{R}$ est une application affine non constante telle que $\forall y \in C, l(y) \geq 0$ et $x \in H$ (cf. exercice 8, i)iii) où l'on prouve qu'il en existe toujours au moins un). Montrer que tout point extrémal de $H \cap C$ est un point extrémal de C.

  iii) Conclure.

b) Conclure.

Exercice 5 :
On munit $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et on note $\mathfrak{B} \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ la boule unité fermée.

a) Décrire les points extrémaux de $\mathfrak{B}$ (on pourra utiliser la décomposition polaire).

b) En utilisant l'exercice 4, en déduire l'enveloppe convexe du groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une matrice réelle de taille $n \times n$ est bistochastique si ses coefficients $(a_{i,j})$ sont positifs ou nuls et si l'on a pour tout i

$$\sum_j a_{i,j} = 1$$

et pour tout j,

$$\sum_i a_{i,j} = 1\,.$$

On note $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

a) Montrer que $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R})$ est compact et convexe.

b) Montrer que les matrices de permutation sont des points extrémaux de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R})$.

c) Décrire les points extrémaux de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R})$.

d) En utilisant l'exercice 4, conclure que tout élément de $\mathfrak{B}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme barycentre à coefficients positifs d'au plus $(n-1)^2+1$ matrices de permutation.

Exercice 7 :
L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : tout compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide est contenu dans un unique ellipsoïde (centré en 0) de volume minimal.
On note $\mathcal{Q}$ (resp. $\mathcal{Q}_+$, resp. $\mathcal{Q}_{++}$) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, resp. définies positives) sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide.

a) On note V_0 le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $q \in \mathcal{Q}_{++}$ et $\mathcal{E}_q$ l'ellipsoïde d'équation $q \leq 1$ défini par q. Montrer que

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_q) = \frac{V_0}{\sqrt{\det(q)}}$$

où $\det(q)$ est le déterminant de la matrice de q dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

b) Vérifier que l'application $N : q \mapsto \sup_{\|x\|\leq 1} |q(x)|$ est une norme sur $\mathcal{Q}$.

c) On note $C := \{q \in \mathcal{Q}_+ : \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$. Montrer que C est un convexe compact non vide de $\mathcal{Q}$.

d) Montrer que l'application $\log \circ \det : \mathcal{Q}_{++} \to \mathbb{R}$ est strictement concave.

e) Conclure.

Exercice 8 : On rappelle qu'un espace de Hilbert réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est complet pour la topologie définie par la norme associée à ce produit scalaire. Soit H un espace de Hilbert réel. Soit C un convexe fermé non vide de H. Soit $x_0 \in H \setminus C$.

a) Donner quelques exemples d'espaces de Hilbert réels.

b) Montrer la formule du parallélogramme : pour tous $x, y \in H$, on a

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\,.$$

c) Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans C telle que, pour tout n, $d(x_0, y_n)^2 \leq d(x, C)^2 + \frac{1}{n}$.

d) Montrer que la suite (y_n) est de Cauchy dans H.

e) Montrer qu'il existe $y \in C$ tel que $d(x_0, y) = d(x, C)$.

f) Montrer qu'un tel y est unique, et qu'il est sur la frontière ∂C de C. On le note $y = \pi_C(x_0)$.

g) Montrer que le point $y \in C$ est caractérisé par les inégalités suivantes :

$$\forall z \in C\,,\ \langle y - x, y - z\rangle \leq 0\,.$$

h) Montrer que l'application $\pi_C : H \setminus C \to \partial C$ est 1-lipschitzienne.

i) On suppose dans cette question que H de dimension finie.

  i) On suppose C compact. Montrer que l'application π_C est surjective.

  ii) On ne suppose plus C compact. Montrer que π_C est surjective.

  iii) Montrer que par tout point x de ∂C passe au moins un hyperplan d'appui de C (c'est-à-dire il existe un hyperplan $H = l^{-1}(\{0\})$ contenant x où $l : H \to \mathbb{R}$ est une application affine surjective et telle que pour tout $z \in C$, $l(z) \geq 0$).

j) Montrer que tout sous-espace vectoriel fermé G de H vérifie que $\pi_G : H \to G$ est linéaire et que

$$H = G \oplus G^{\perp}\,.$$

k) Montrer que l'hypothèse ≪ G fermé ≫ est nécessaire.