Algèbre géométrique - TD6
Compléments de géométrie projective

Exercice 1 :
Soit Δ un droite dans un plan projectif P. Soient A, B, C trois points deux-à-deux distincts de Δ. Proposer une construction géométrique (à la règle seule) du quatrième harmonique, i.e. du point $D \in \Delta$ tel que $[A, B, C, D] = -1$.

Exercice 2 :
Soient D et D' deux droites d'un plan projectif P. Soient M_1, M_2 et M_3 trois points deux-à-deux distincts de D et M'_1, M'_2 et M'_3 trois points deux-à-deux distincts de D'. On note $h : D \to D'$ l'unique homographie telle que $h(M_i) = M'_i$ pour $i = 1, 2, 3$.
En écrivant explicitement h comme composée de deux perspectives, proposer une construction géométrique (à la règle seule) de l'image $h(M)$ d'un point $M \in D$ quelconque.

Exercice 3 : Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1 \geq 2$ et $H \subset V$ un hyperplan. L'objectif de cet exercice est détudier les homographies de $\mathbb{P}(V)$ dont la restriction à l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(H)$ est l'identité (i.e. les homographies de $\mathbb{P}(V)$ qui fixent $\mathbb{P}(H)$ point par point).

a) Si $h \in \mathrm{PGL}(V)$ fixe $\mathbb{P}(H)$ point par point, montrer qu'il existe un relevé $g \in \mathrm{GL}(V)$ de h tel que la restriction de g à H soit l'identité.

b) En distinguant suivant le déterminant de g, décrire (vecteurs propres, matrice dans une base bien choisie, éléments caractéristiques) les deux familles d'applications linéaires g ainsi obtenues (dilatations si $\det(g) \neq 1$ et transvections si $\det(g) = 1$).

c) Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ une dilatation ($g \neq \mathrm{id}$) et h son image dans $\mathrm{PGL}(V)$. On dit que h est une homologie de $\mathbb{P}(V)$.
   - i) Montrer que h admet un unique point fixe a dans $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)$.
   - ii) Montrer que les droites passant par a sont stables par h.
   - iii) Montrer que la restriction de h à $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)$ est une homothétie de centre a.
   - iv) Si $n = 2$, connaissant $\mathbb{P}(H)$, a et l'image $h(m)$ d'un point $m \notin \mathbb{P}(H) \cup \{a\}$, construire à la règle l'image par h d'un point quelconque du plan.

d) Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ une transvection ($g \neq \mathrm{id}$) et h son image dans $\mathrm{PGL}(V)$. On dit que h est une élation de $\mathbb{P}(V)$.
   - i) Montrer que h n'admet aucun point fixe dans $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)$.
   - ii) Montrer qu'il existe un unique point $a \in \mathbb{P}(H)$ tel que les droites passant par a sont stables par h.
   - iii) Montrer que la restriction de h à $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H)$ est une translation.
   - iv) Si $n = 2$, connaissant $\mathbb{P}(H)$, a et l'image $h(m)$ d'un point $m \notin \mathbb{P}(H)$, construire à la règle l'image par h d'un point quelconque du plan.

e) Montrer que tout homographie de $\mathbb{P}(V)$ est la composée d'un nombre fini d'homologies et d'élations.

f) On suppose $n = 2$. Soit h une homographie de $\mathbb{P}(V)$.
   - i) On suppose que h fixe deux points distincts a et b. Montrer que soit h fixe la droite (ab), soit h laisse globalement invariante une droite contenant a ou b distincte de (ab).
   - ii) On suppose $k \neq \mathbb{F}_2$ et $h \neq \mathrm{id}$.
     - i. Montrer qu'il existe une droite $D \subset \mathbb{P}(V)$ telle que $h(D) \neq D$ et deux points $a \neq b \in D$ tels que $h(a) \neq a$ et $h(b) \neq b$.

ii. En déduire qu'il existe une homologie g de $\mathbb{P}(V)$ telle que $g \circ h$ fixe a et b.

iii) Montrer que si $k \neq \mathbb{F}_2$, il existe une homologie f de $\mathbb{P}(V)$ telle que $f \circ g \circ h$ soit une homologie.

iv) En déduire que si $k \neq \mathbb{F}_2$, h est produit d'au plus trois homologies.

Exercice 4 : Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1 \geq 2$. Soient $H, H' \subset \mathbb{P}(V)$ deux hyperplans distincts.

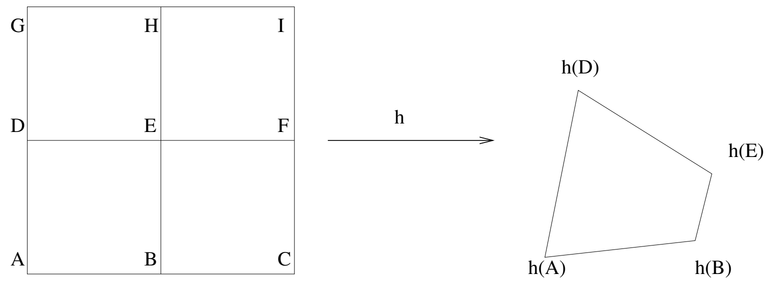
a) Montrer que pour tout point $M \in \mathbb{P}(V) \setminus H \cap H'$, il existe un unique hyperplan H_M contenant M dans le faisceau engendré par H et H'.

b) On dit que deux points distincts M et M' de $\mathbb{P}(V) \setminus H \cap H'$ sont conjugués harmoniques par rapport à H et H' si $[P, P', M, M'] = -1$, avec $P = (MM') \cap H$ et $P' = (MM') \cap H'$. Montrer que l'ensemble des conjugués harmoniques de M est $H(M) \setminus H \cap H'$, où $H(M)$ est l'unique hyperplan du faisceau tel que $[H, H', H_M, H(M)] = -1$. On appelle $H(M)$ l'hyperplan polaire de M par rapport à H et H'.

c) Construire à la règle seule la droite polaire dans le cas du plan projectif ($n = 2$).

d) Étant donnés trois points non alignés P, Q et R du plan projectif, et un quatrième point O hors des trois droites (PQ), (QR) et (PR), construire à la règle seule un triangle ABC tel que $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (AC)$ et les droites (AQ), (BR) et (CP) soient concourantes en O.

Exercice 5 : Soient $ABED$, $BCFE$, $DEHG$ et $EFIH$ quatre carrés dans $\mathbb{R}^2 \subset P^2(\mathbb{R})$ et $h : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$ une homographie. Étant donnés les points $h(A)$, $h(B)$, $h(E)$ et $h(D)$ comme sur la figure, construire à l'aide d'une règle les points $h(C)$, $h(F)$, $h(I)$, $h(H)$ et $h(G)$.



Exercice 6 : Soient a, b, c, d, e cinq points d'une droite projective D d'un plan projectif P. On suppose a, b, c deux-à-deux distincts. Construire à la règle seule des points f et g de D tels que

$$[a, b, c, d] + [a, b, c, e] = [a, b, c, f] \text{ et}$$

$$[a, b, c, d].[a, b, c, e] = [a, b, c, g]\,.$$