Algèbre géométrique - TD8

Exercice 1 : Calculer la signature des formes quadratiques réelles suivantes :

a) $q : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $q(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$;

b) $q : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $q(P) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(k)P(-k)e^{-k}$.

Exercice 2 : Soit k un corps fini (de caractéristique différente de 2).

a) Montrer que l'ensemble $k^{\times 2}$ des carrés de $k^\times$ est un sous-groupe d'indice 2 de $k^\times$.

b) Montrer que si $a, b \in k^\times$, alors il existe $x, y \in k$ tels que $1 = ax^2 + by^2$.

c) Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe exactement deux classes d'isomorphisme de formes quadratiques non dégénérées sur V (q_1 et q_2 sont dites isomorphes s'il existe $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $q_2 = q_1 \circ \phi$).

d) On considère la forme quadratique sur $\mathbb{F}_5^2$ donnée par $q(x, y) = 2x^2 + 4xy$. Donner une base orthonormée de q.

Exercice 3 :
Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, V un K-espace vectoriel de dimension n, Q une forme quadratique non dégénérée sur V et ϕ sa forme polaire.

a) Si $\dim(E) = d$, quelle est la dimension de $E^\perp$? Et que peut-on dire de $(E^\perp)^\perp$?

b) Montrer que le noyau $N(Q_E)$ est égal à $E \cap E^\perp$.

c) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) Q_E est non dégénérée ; (b) $V = E \oplus E^\perp$. De plus, sous ces conditions, montrer que $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de V est *anisotrope* s'il ne contient aucun vecteur isotrope non nul. On suppose que V n'est *pas* anisotrope.

d) Soit u un vecteur isotrope non nul. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope v tel que $\phi(u, v) = 1$.

e) Soit P le plan vectoriel engendré par u et v. Montrer que Q_P est non dégénérée. On dira que P est un plan *hyperbolique* et que (u, v) en est une base hyperbolique.

f) Montrer que V est somme directe orthogonale de plans hyperboliques $P = P_1, \ldots, P_r$ (pour un entier $r \geq 1$) et d'un sous-espace anisotrope F.

g) Soit F un sous-espace vectoriel de V de dimension 2. Montrer que F est un plan hyperbolique si et seulement si il possède une base orthogonale (e_1, e_2) telle que $Q(e_1) = 1 = -Q(e_2)$.

On suppose que $K = \mathbb{R}$.

h) Supposons que V soit somme directe orthogonale de r plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive. Déterminer alors la signature (p, q) de Q.

i) Réciproquement, si Q est de signature (p, q), avec $p \geq q > 0$, montrer que V est la somme directe orthogonale de r plans hyperboliques et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive, pour des entiers $r > 0$ et $f \geq 0$ que l'on exprimera en fonction de p et q.

Exercice 4 : Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, muni d'une forme quadratique $q : V \to k$. Un sous-espace vectoriel $H \subset V$ est dit totalement isotrope si $q(x) = 0$ pour tout $x \in H$.

a) Montrer que tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux ont la même dimension (si A et B sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux, on pourra considérer des supplémentaires A' et B' de $A \cap B$ dans A et B respectivement, et montrer que $A + (A'^\perp \cap B')$ est totalement isotrope).

b) Que vaut cette dimension quand $k = \mathbb{R}$ et q est de signature (p, r) ?

Exercice 5 : Soient V un k-espace vectoriel, muni d'une base $\mathcal{B}$ et soient q_1, q_2 deux formes quadratiques sur V. On suppose q_1 non dégénérée. Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_1)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q_2)$.
Montrer que q_1 et q_2 sont réductibles dans une même base si et seulement si $A^{-1}B$ est diagonalisable.

Exercice 6 : Soit $\mathbb{H}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $1, i, j, k$, muni de la loi de multiplication

$$(a1+bi+cj+dk)\cdot(e1+fi+gj+hk) = (ae-bf-cg-dh)1+(ae+bf+ch-dg)i+(ag+ce-bh+df)j+(ah+ed+bg-cf)k,$$

qui en fait une $\mathbb{R}$-algèbre associative (les quaternions). On note $\mathbb{H}^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{H}$.
Si $z = a1 + bi + cj + dk$, on note $\bar{z} = a1 - bi - cj - dk$.
On munit $\mathbb{H}$ de la norme euclidienne $\|a1 + bi + cj + dk\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. On note S la sphère unité de $\mathbb{H}$.
On note $\mathbb{H}_0$ le sous-espace vectoriel engendré par i, j et k.

a) Vérifier que $\overline{zz'} = \overline{z'}\bar{z}$.
b) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{H}$, $z\bar{z} = \bar{z}z = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)1$. En déduire que $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} - \{0\}$ et une expression pour z^{-1}.
c) Montrer que S est un sous-groupe de $\mathbb{H}^\times$.
d) Pour $q \in S$, on note $\iota_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ défini par $\iota_q(h) = qhq^{-1}$. Montrer que ι_q est une isométrie directe de $\mathbb{H}$, qui stabilise $\mathbb{H}_0$.
e) Montrer que l'application $\iota : S \to SO(\mathbb{H}_0)$, définie par $\iota(q) = \iota_{q|\mathbb{H}_0}$ est un morphisme de groupe continu, et en déterminer le noyau.
f) Soit $v \neq 0 \in \mathbb{H}_0$. Montrer que ι envoie $S \cap \mathrm{vect}(1, v)$ sur le sous-groupe $\mathrm{Fix}_{SO(\mathbb{H}_0)}(v)$ des rotations d'axe $\mathrm{vect}(v) \subset \mathbb{H}_0$. En déduire que ι est surjective.
g) En déduire un homéomorphisme $SO(3, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Exercice 7 : Soit G un sous-groupe fini de $SO(3, \mathbb{R})$. Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, $T = S/G$ et $\pi : S \to T$ la projection canonique. Si $t = \pi(x)$, on note $s(t)$ le cardinal du stabilisateur de x et $c(t)$ le cardinal de l'orbite de x.

a) Montrer que $2|G| - 2 = \sum_{t \in T}(s(t) - 1)c(t)$.
b) Discuter valeurs possibles pour $s(t)$ et $|G|$ (on pourra diviser par $|G|$ l'égalité précédente puis majorer le terme de gauche et minorer le terme de droite en fonction de $|T|$ et des valeurs de $s(t)$).

Exercice 8 : Soit $N \neq \{\mathrm{id}\}$ un sous-groupe distingué de $SO(3, \mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de montrer que $N = SO(3, \mathbb{R})$.
On note N_0 la composante connexe de id dans N.

a) Montrer que $SO(3, \mathbb{R})$ est engendré par les rotations d'angles π.
b) Montrer que si $\theta \in [0, \pi]$, toutes les rotations d'angle $\pm\theta$ sont conjuguées. En déduire que si N contient une rotation d'angle π, $N = SO(3, \mathbb{R})$.
c) Montrer que $N_0 \neq \{\mathrm{id}\}$ (pour $h \in N$, on pourra considérer l'application $f : SO(3, \mathbb{R}) \to N$ définie par $f(g) = [h, g] := hghg^{-1}$)
d) Montrer qu'il existe $g \in N_0$ tel que $\mathrm{Tr}(g) \leq 1$.
e) Montrer qu'il existe $g \in N_0$ tel que $\mathrm{Tr}(g) = 1$. Conclure.