Géométrie Affine et Projective - TD9

Exercice 1 :
Soit $\mathcal{C}$ un conique propre d'un plan projectif réel $\mathcal{P}$.
Quels sont les points de $\mathcal{P}$ d'où l'on peut mener deux (resp. une, resp. aucune) tangentes à $\mathcal{C}$?

Exercice 2 :
Soit A, B, C, D quatre points distincts d'une conique propre $\mathcal{C}$. Montrer que le birapport $[A, B, C, D]$ est égal à -1 si et seulement si la polaire de (BC) est sur la droite (AD).

Exercice 3 :
Soit D une droite d'un plan projectif, et $A \neq B$ deux points hors de D. Soit ϕ une bijection de D dans D.

a) Montrer que ϕ est une homographie si et seulement si il existe une conique $\mathcal{C}$ tel que pour tout $M \in D$, $(AM) \cap (B\phi(M)) \in \mathcal{C}$.

b) Montrer, le cas échéant, que l'homographie ϕ est involutive si et seulement si la polaire de (AB) par rapport à $\mathcal{C}$ est sur D.

Exercice 4 :
Soit $\mathcal{P} = \mathbb{P}(V)$ un plan projectif. Soit P un plan de l'espace vectoriel des formes quadratiques sur V.

a) Associer à tout élément de $\mathcal{F} := \mathbb{P}(P)$ une conique de $\mathcal{P}$ ($\mathcal{F}$ sera appelé un faisceau de coniques).

b) Soit $A \in \mathcal{P}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{P}$ qui appartient à la polaire de A par rapport à n'importe quelle conique de $\mathcal{F}$.

c) Montrer qu' étant donnés quatre points A, B, C, D tels que 3 ne sont pas alignés, il existe un unique faisceau de conique passant par ces quatre points.

d) Montrer qu'il existe au plus quatre points passant par toute conique du faisceau $\mathcal{F}$ (un tel point sera appelé un point de base de $\mathcal{F}$).

e) Soit $E \in \mathcal{P}$ qui n'est pas un point de base de $\mathcal{F}$. Montrer qu'il existe une unique conique $\mathcal{C}_E$ de $\mathcal{F}$ passant par E.

f) Soit d une droite ne passant par aucun point de base de $\mathcal{F}$. On considère l'application $\phi : d \to d$ qui à M associe l'autre point d'intersection de $\mathcal{C}_M$ avec d (celui qui n'est pas M, sauf si $\mathcal{C}_M$ est tangente à d). Montrer que ϕ est une homographie.

Exercice 5 :
Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, et vu dans le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On considère la conique projective $\mathcal{C}_\mathcal{E} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. On appelle points cycliques de $\mathcal{E}$ l'intersection de $\mathcal{C}_\mathcal{E}$ avec la droite à l'infini : ces points sont des points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.
Montrer que les cercles de $\mathcal{E}$ sont exactement les coniques propres de $\mathcal{E}$ contenant les points cycliques. En déduire une explication sur le nombre de points d'intersection de deux cercles de $\mathcal{E}$ par rapport au nombre de points d'intersection de deux coniques de $\mathcal{E}$ en général. Comprendre aussi pourquoi l'énoncé "par cinq points passe une conique" devient "par trois points passe un cercle".

1 Coniques euclidiennes

Exercice 6 : Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien.

a) Soient $\mathcal{D}$ une droite affine (la *directrice*) de $\mathcal{P}$ et $F \in \mathcal{P}$ un point (le *foyer*) n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Soit $e > 0$. On note $\pi_{\mathcal{D}}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$.
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $d(M, F) = ed(M, \pi_{\mathcal{D}}(M))$.
   i) Montrer que $\mathcal{C}$ est une conique affine non dégénérée.
   ii) A quelle condition sur e $\mathcal{C}$ est-elle une ellipse ? une parabole ? une hyperbole ?

b) Réciproquement, soit $\mathcal{C}$ une conique non dégénérée de $\mathcal{P}$ (non vide) qui n'est pas un cercle. Montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}$, un point F et $e > 0$ tels que $\mathcal{C}$ soit l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $d(M, F) = ed(M, \pi_{\mathcal{D}}(M))$.

Exercice 7 :
Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, $\mathcal{C}$ une conique propre de $\mathcal{E}$, F un foyer de $\mathcal{C}$ et D la directrice correspondante. Soient $M, N \in \mathcal{C}$ deux points distincts. On suppose que (MN) et D se coupent en un unique point P.
Montrer que (PF) est une bissectrice de l'angle de droites formé par (FM) et (FN).
Que dire dans le cas où (MN) et D sont parallèles ?

Exercice 8 :
Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, $\mathcal{C}$ une conique propre de $\mathcal{E}$ qui n'est pas un cercle, F un foyer de $\mathcal{C}$ et D la directrice correspondante. Soit $M \in \mathcal{C}$. On suppose que la tangente en M intersecte D en un unique point P.
Montrer que (PF) est orthogonale à (FM).
Que dire dans le cas où la tangente est parallèle à D ? Et si $\mathcal{C}$ est un cercle ?

Exercice 9 :
Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, $\mathcal{P}$ une parabole dans $\mathcal{E}$ de foyer F et directrice D. Soit $M \in \mathcal{P}$. On note H le projeté orthogonal de M sur D.
Montrer que la tangente en M à $\mathcal{P}$ est la médiatrice du segment $[FH]$.

Exercice 10 : Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, $\mathcal{C}$ une conique propre à centre dans $\mathcal{E}$. On note F et F' les foyers de $\mathcal{C}$. Soit $M \in \mathcal{C}$.
Montrer que la tangente en M est une bissectrice de l'angle en M du triangle FMF'. Peut-on dire s'il s'agit de la bissectrice intérieure ou de la bissectrice extérieure ? Que se passe-t-il dans le cas d'une parabole ?

Exercice 11 :
Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit $q(x, y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, avec $0 < b < a$, une forme quadratique et $\mathcal{C}$ la conique de $\mathcal{E}$ d'équation $q = 1$.
Soient $M, M' \in \mathcal{C}$ deux points distincts tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient orthogonaux pour le produit scalaire défini par q.

a) Montrer que le quadrilatère $OMPM'$ est un parallélogramme, d'aire constante égale à ab, où P est le point d'intersection des tangentes en M et en M'.

b) Montrer que la quantité $OM^2 + OM'^2$ est constante égale à $a^2 + b^2$.

Exercice 12 :
Soit $\mathcal{C}$ une conique propre d'un plan affine euclidien. Décrire le groupe des isométries qui préservent $\mathcal{C}$.