Sorbonne Université
Master 1 Mathématiques

4M001 2019-2020

E. Lepage, A. Oancea

Géométrie affine et projective

Devoir No. 1 du 13 octobre 2019

À rendre en cours le 18 octobre 2019, ou à envoyer par mail le 21 octobre au plus tard à `alexandru.oancea@imj-prg.fr`

Exercice 1. Considérons trois points non-alignés A, B, C dans un plan affine $\mathcal{E}$ sur un corps k. Considérons trois points $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ différents des sommets du triangle ABC (Figure 1). L'on note $\alpha, \beta, \gamma \in k$ les scalaires tels que

$$\overrightarrow{A'B} = \alpha\overrightarrow{A'C}, \qquad \overrightarrow{B'C} = \beta\overrightarrow{B'A}, \qquad \overrightarrow{C'A} = \gamma\overrightarrow{C'B}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'énoncé suivant :

Théorème de Ceva. *Les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\alpha\beta\gamma = -1$.*

I

1. Montrer que A, B, C forment un repère affine.

2. Soit $P \in \mathcal{E}$ un point quelconque. Montrer qu'il existe des scalaires uniquement déterminés $a, b, c \in k$ tels que $a + b + c = 1$ et $P = aA + bB + cC$, où cette dernière égalité est entendue au sens suivant : pour tout point $P' \in \mathcal{E}$ l'on a $\overrightarrow{PP'} = a\overrightarrow{AP'} + b\overrightarrow{BP'} + c\overrightarrow{CP'}$. L'on rappelle que ces scalaires sont appelés “coordonnées barycentriques” par rapport au repère affine (A, B, C).

3. Déterminer les coordonnées barycentriques des points A', B', C' par rapport au repère affine (A, B, C). Comment expliquez-vous le fait que, pour chacun de ces points, une et une seule de ses coordonnées barycentriques est nulle ?

II

4. Supposons que les droites (AA') et (BB') sont parallèles. Utiliser le théorème de Thalès pour montrer que la droite (CC') leur est parallèle si et seulement si $\alpha\beta\gamma = -1$.

III

Supposons que les droites (AA') et (BB') se rencontrent en un point P de coordonnées barycentriques (a, b, c).

5. Exprimer α et β en fonction de a, b, c (l'on pourra penser à la propriété d'associativité du barycentre).

6. Supposons que la droite (CC') passe par P. Exprimer alors γ en fonction de a, b, c et en déduire que $\alpha\beta\gamma = -1$.

7. Supposons $\alpha\beta\gamma = -1$. Exprimer alors γ en fonction de a, b, c et en déduire que P est barycentre de C et C' avec des poids que l'on indiquera. Conclure.

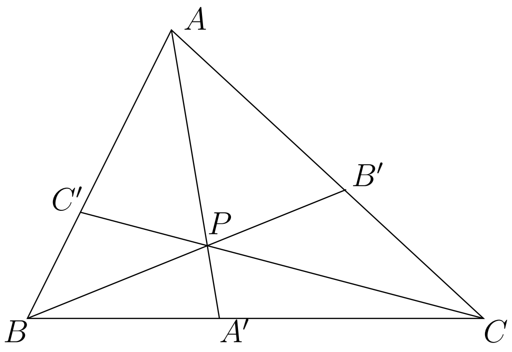

Figure 1: Configuration du théorème de Ceva.

Exercice 2. Considérons la figure ci-dessous tracée dans un plan affine réel, dans laquelle les droites $d_4 = (CE)$ et $d_5 = (FG)$ sont parallèles. Redessiner cette figure après avoir envoyé à l'infini les droites d_1, d_4, respectivement (BE).

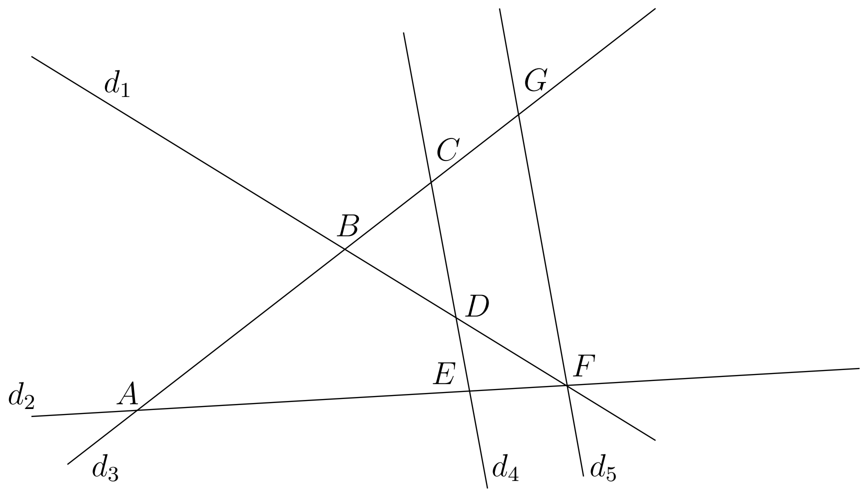

Figure 2: Une configuration de droites et de points dans un plan affine.