Sorbonne Université 4M001 2019-2020
Master 1 Mathématiques E. Lepage, A. Oancea

Géométrie affine et projective
Devoir No. 2 du 28 novembre 2019
À rendre en TD le 5 décembre 2019, ou à envoyer par mail le 7 décembre au plus tard à `emmanuel.lepage@imj-prg.fr`

Exercice 1. Soient $\mathcal{E} = \mathbb{P}(V)$ un espace projectif de dimension 3 (c'est-à-dire, $\dim V = 4$) sur un corps k et $\mathcal{D}_1 = \mathbb{P}(H_1), \mathcal{D}_2 = \mathbb{P}(H_2)$ deux droites projectives de $\mathcal{E}$ telles que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$.

Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une homographie telle que $\phi(M) = M$ pour tout $M \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. On note $\pi : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$ la projection canonique.

1. Montrer que $H_1 \oplus H_2 = V$.
2. Soit (e_1, e_2) une base de H_1 et (e_3, e_4) une base de H_2. Montrer que, si $g \in \mathrm{GL}(V)$ est telle que $\phi = \pi(g)$, alors $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3,e_4)}(g)$ est une matrice diagonale. Que peut-on dire de plus sur les coefficients diagonaux ?
3. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{E}\backslash(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)$, il existe une unique droite $\mathcal{D}_M$ passant par M telle que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_M \neq \varnothing$ et $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_M \neq \varnothing$. On note A_M l'unique point de $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_M$ et B_M l'unique point de $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_M$.
4. Montrer que si $M \in \mathcal{E}\backslash(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)$, $\phi(M) \in \mathcal{D}_M$.
5. Montrer que, si $M_1, M_2 \in \mathcal{E}\backslash(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)$, $[A_{M_1}, B_{M_1}, M_1, \phi(M_1)] = [A_{M_2}, B_{M_2}, M_2, \phi(M_2)]$ (en reprenant les notations de la question 2, on pourra interpréter les birapports en terme des coefficient diagonaux de $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3,e_4)}(g)$).

Exercice 2. Soit $N \neq \{\mathrm{id}\}$ un sous-groupe distingué de $SO(3, \mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de montrer que $N = SO(3, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire que $SO(3, \mathbb{R})$ est un groupe simple).

On note N_0 la composante connexe de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ dans N.

1. Montrer que tout élément de $SO(3, \mathbb{R})$ est un produit de deux rotations d'angles π.
2. Montrer que si $\theta \in [0, \pi]$, toutes les rotations d'angle $\pm\theta$ sont conjuguées. En déduire que si N contient une rotation d'angle π, $N = SO(3, \mathbb{R})$.
3. Montrer que $N_0 \neq \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\}$ (pour $h \in N$, on pourra considérer l'application $f : SO(3, \mathbb{R}) \to N$ définie par $f(g) = [h, g] := hghg^{-1}$).
4. Montrer qu'il existe $g \in N_0$ tel que $\mathrm{Tr}(g) \leqslant 1$.
5. Montrer qu'il existe $g \in N_0$ tel que $\mathrm{Tr}(g) = 1$.
6. Conclure que $N = SO(3, \mathbb{R})$.

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) := \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, la conique

$$\mathcal{C} = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); x^2 - yz = 0\}$$

d'équation $x^2 - yz = 0$.

1. Soit $D_1 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la droite projective d'équation $x = 0$, et on munit $U_1 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \backslash D_1$ de la structure affine usuelle. Calculer une équation de la conique affine $\mathcal{C} \cap U_1$ dans un repère affine de U_1 bien choisi et déterminer la nature de $\mathcal{C} \cap U_1$ (hyperbole, parabole, ellipse...).

2. Soit $D_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la droite projective d'équation $y = 0$, et on munit $U_2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \backslash D_2$ de la structure affine usuelle. Calculer une équation de la conique affine $\mathcal{C} \cap U_2$ dans un repère affine de U_2 bien choisi et déterminer la nature de $\mathcal{C} \cap U_2$ (hyperbole, parabole, ellipse...).

3. Soit $A = [1 : 1 : 1] \in \mathcal{C}$. Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A.