Feuille de TD n° 1

Sommes directes, valeurs propres, vecteurs propres, polynôme caractéristique, matrices diagonalisables

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^4$ donner des exemples de sous-espaces vectoriels E, F de dimension 2 tels que $E \neq F$ et :

a) $E + F \neq \mathbb{R}^4$. Quelle est alors la dimension de $E + F$?

b) $E + F = \mathbb{R}^4$. Quelle est alors la dimension de $E \cap F$?

L'on donnera des exemples de tels espaces vectoriels définis par des équations linéaires, respectivement par la donnée de bases.

Exercice 2 : Pour les matrices A ci-dessous, calculer leurs polynômes caractéristiques, leurs valeurs propres, une base de leurs espaces propres, justifier qu'elles sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$, spécifier une base dans laquelle elles sont diagonalisables et indiquer la matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale :

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} ; \qquad (iii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ;$$

$$(iv) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez vos résultats en calculant P^{-1} et en effectuant la multiplication $P^{-1}AP$.

Pour chacune des matrices A ci-dessus, indiquer leur rang et la dimension de leur noyau.

Lorsque $\ker A \neq \{0\}$, donner des bases ainsi que des équations de définition pour $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$.

Donner des équations de définition pour chacun des espaces propres ci-dessus.

Exercice 3 : Soient $u \in \operatorname{End}_k(E)$ inversible et λ une valeur propre de u. Montrer que $\lambda \neq 0$ et que λ^{-1} est valeur propre pour u^{-1}.

Exercice 4 : Soit $p \in \operatorname{End}_k(E)$ un *projecteur*, c'est-à-dire un endomorphisme tel que $p \circ p = p$. Montrer que $E = \ker(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$. En déduire que p est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et ses espaces propres.

Exercice 5 : Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ et V un k-espace vectoriel. Une *symétrie de V* est un endomorphisme $s \in \operatorname{End}_k(V)$ tel que $s^2 = \operatorname{Id}_V$. L'on se propose de montrer que s est diagonalisable avec valeurs propres ± 1.

a) L'on pose $p_\pm = \frac{1}{2}(\operatorname{Id}_V \pm s)$ et $V_\pm = \operatorname{Im} p_\pm$. Montrer que $p_\pm$ sont des projecteurs. Montrer que $V = V_+ \oplus V_-$ et que $V_\pm$ sont constitués de vecteurs propres correspondant à la valeur propre ± 1.

b) Conclure.

c) Si $s \neq \pm \operatorname{Id}_V$, alors V_+ et V_- sont simultanément non-nuls. L'endomorphisme s est la symétrie par rapport à V_+ parallèlement à V_-.

Exercice 6 : On se place sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables de la droite réelle, à valeurs réelles. Soit $D(f) = f'$ l'application définie de E dans E qui associe à toute fonction $f \in E$ sa dérivée f'.

a) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de D.

b) Montrer que la famille $\{x \mapsto e^{\alpha x}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ d'éléments de E est libre.

Exercice 7 : Soit $A, B \in M_n(k)$. On note P_A le polynôme caractéristique associé.

a) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

b) Montrer que si A ou B est inversible, alors $P_{AB} = P_{BA}$.

c) Notons $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible en explicitant P^{-1}. Vérifier que $MP = PN$, puis montrer que $P_{AB} = P_{BA}$.

Exercice 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Factoriser $P_A(X)$. Est-ce que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Exercice 9 : Soit $T = [t_{ij}] \in M_n(k)$ une matrice triangulaire. On suppose qu'il existe $\lambda \in k$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $t_{ii} = \lambda$. Montrer que T est diagonalisable ssi T est diagonale.

Exercice 10 : (i) La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier, puis tenter de la trigonaliser.

(ii) Même question pour la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 : Soient E un k-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathrm{End}_k(E)$. On suppose u nilpotent, *i.e.* il existe un entier $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^d = 0$. Le plus petit entier vérifiant cette égalité est appelé *indice de nilpotence* de u.

a) Montrer que u n'est pas inversible.

b) Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

c) Montrer que l'indice de nilpotence de u est n si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ (où les $E_{i,j}$ désignent les matrices élémentaires).