Feuille de TD n° 1

Sommes directes, valeurs propres, vecteurs propres, polynôme caractéristique, matrices diagonalisables

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^4$ donner des exemples de sous-espaces vectoriels E, F de dimension 2 tels que $E \neq F$ et :

a) $E + F \neq \mathbb{R}^4$. Quelle est alors la dimension de $E + F$?

b) $E + F = \mathbb{R}^4$. Quelle est alors la dimension de $E \cap F$?

On donnera des exemples de tels espaces vectoriels définis par des équations linéaires, respectivement par la donnée de bases.

Solution de l'exercice 1. Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et x, y, z, t les coordonnées dans cette base.

a) Si $E \neq F$ alors $E \cap F$ est nécessairement de dimension 0 ou 1. Dans le premier cas on aurait $\dim(E+F) = 4$ donc $E + F = \mathbb{R}^4$. On en déduit que nécessairement $\dim E \cap F = 1$ et $\dim E + F = 3$.

Exemple : $E = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$, $F = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$.

De façon équivalente : $E = \{x - y = 0,\ t = 0\}$, $F = \{x = y = 0\}$.

b) Puisque $\dim\ E \cap F = \dim\ E + \dim\ F - \dim(E+F)$, on déduit $\dim\ E \cap F = 0$, ou encore $E \cap F = \{0\}$.

Exemple : $E = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_3 + e_4)$, $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$.

De façon équivalente : $E = \{x - y = 0,\ z - t = 0\}$, $F = \{y = 0,\ t = 0\}$.

Exercice 2 : Pour les matrices A ci-dessous, calculer leur polynôme caractéristique, leurs valeurs propres, des bases de leurs espaces propres, justifier que ces matrices sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$, spécifier une base dans laquelle elles sont diagonalisables et indiquer la matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale :

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} ; \qquad (iii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ;$$

$$(iv) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifiez vos résultats en calculant P^{-1} et en effectuant la multiplication $P^{-1}AP$.

Pour chacune des matrices A ci-dessus, indiquer leur rang et la dimension de leur noyau.

Lorsque $\mathrm{Ker}\, A \neq \{0\}$, donner des bases ainsi que des équations de définition pour $\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im}\, A$.

Donner des équations de définition pour chacun des espaces propres ci-dessus.

Solution de l'exercice 2. Dans les trois premiers cas la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque son polynôme caractéristique est scindé à racines réelles distinctes : il y a n sous-espaces propres en somme directe (c.f th.0.2.2) dans un espace de dimension n, la matrice est diagonalisable (prop.0.2.4). Pour la quatrième matrice, on trouve une valeur propre double et il faut étudier la dimension de l'espace propre correspondant. Dans la suite, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par la matrice A.

(i) $\det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 0 & 2 & 3-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)(3-X)$, les valeurs propres sont $1, 2, 3$, de multiplicité 1.

Comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, un vecteur propre pour 1 est $e_1 - e_2 + e_3$. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, un vecteur propre pour 2 est $e_2 - 2e_3$. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, e_3 est vecteur propre pour 3. Ceci se voyait directement sur la matrice A.

La matrice P de passage de la base canonique à la base $(e_1-e_2+e_3, e_2-2e_3, e_3)$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Alors $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1, 2, 3)$ car c'est la matrice de u dans la base de vecteurs propres $(e_1-e_2+e_3, e_2-2e_3, e_3)$.

L'inverse de P est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On la calcule en inversant le système $v_1 = e_1 - e_2 + e_3, v_2 = e_2 - 2e_3, v_3 = e_3$ qui est triangulaire donc $e_3 = v_3$, $e_2 = v_2 + 2v_3$, $e_1 = v_1 + v_2 + v_3$ ou bien on utilise les opérations sur les colonnes : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1 \to C_1 + C_3]{C_2 \to C_2 + 2C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 - C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifions les calculs :

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

La matrice est inversible de déterminant 6, son noyau est $\{0\}$, son image $\mathbb{R}^3$.

(ii)

$$\begin{aligned}\det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} 4-X & -2 & 2 \\ -1 & 3-X & 1 \\ 1 & -1 & 5-X \end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 4-X & -2 & 0 \\ -1 & 3-X & 4-X \\ 1 & -1 & 4-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X) \begin{vmatrix} 4-X & -2 & 0 \\ -1 & 3-X & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - L_3}{=} (4-X) \begin{vmatrix} 4-X & -2 & 0 \\ -2 & 4-X & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ = (4-X)((4-X)^2 - 4) = (4-X)(2-X)(6-X)\,.\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $2, 4, 6$. Des vecteurs propres correspondants sont $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$, $e_3 + e_1$. Une matrice P telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(2, 4, 6)$ est donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inverse $P^{-1} =$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifions les résultats par un calcul :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice est inversible, son noyau est $\{0\}$ et son image $\mathbb{R}^3$.

(iii)

$$\det(A - XI_4) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1-X & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} -X & 0 & 0 \\ -2 & -1-X & 2 \\ -1 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$
$$= (2-X)(-1-X)\begin{vmatrix} -X & 0 \\ -1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)(-1-X)(-X)(1-X).$$

Les valeurs propres sont $0, -1, 1, 2$. Des vecteurs propres correspondants sont $e_1 + e_3, e_2, e_2 + e_3, e_4$. Une matrice P telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(0, -1, 1, 2)$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de la matrice est de dimension 1 étant engendré par $e_1 + e_3$, la matrice est donc de rang 3. Une équation du noyau est donnée par le système de 3 équations $y = 0$, $t = 0$, $x - z = 0$ (le fait que nous ayons besoin de 3 équations indépendantes pour décrire le noyau reflète le fait que celui-ci est de codimension 3). L'image de l'endomorphisme défini par la matrice est de codimension 1, contenue dans l'hyperplan $x = 0$ (les vecteurs colonnes de la matrice ont tous leur première coordonnée nulle). L'image est donc égale à cet hyperplan, donné par l'équation $x = 0$.

(iv) La matrice étant triangulaire, son polynôme caractéristique est $\det(A - XI_3) = (1-X)^2(2-X)$. Les valeurs propres sont 1 (multiplicité 2) et 2 (multiplicité 1). L'espace propre pour 1 est donné par le noyau de $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, d'équation $x - y + z = 0$, engendré par $e_1 + e_2$ et $e_2 + e_3$. L'espace propre pour 2 est engendré par e_3. La matrice est diagonalisable car $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3)$ est une base formée de vecteurs propres.

La matrice de passage vers la base $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3)$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dans cette base la matrice de u est diagonale donnée par $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1, 1, 2)$.

On vérifie cette assertion par un calcul : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice est inversible de noyau $\{0\}$ et d'image $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : Soient $u \in \mathrm{End}_k(E)$ inversible et λ une valeur propre de u. Montrer que $\lambda \neq 0$ et que λ^{-1} est valeur propre pour u^{-1}.

Solution de l'exercice 3. En se rapportant à la définition de la notion de valeur propre, on voit que 0 est valeur propre d'un endomorphisme u si et seulement si u n'est pas injectif. Dans ce cas, l'espace propre est $\mathrm{Ker}\, u$.

Dans notre situation, u est inversible et en particulier injectif, donc $\lambda \neq 0$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Alors $x = u^{-1}(u(x)) = \lambda u^{-1}(x)$, ce qui donne $u^{-1}(x) = \lambda^{-1}x$. Comme x est non nul, on déduit que λ^{-1} est valeur propre (avec x vecteur propre).

Exercice 4 : Soit $p \in \mathrm{End}_k(E)$ un *projecteur*, c'est-à-dire un endomorphisme tel que $p \circ p = p$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. En déduire que p est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et ses espaces propres.

Solution de l'exercice 4. Pour montrer $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ nous devons montrer $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.

Montrons $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$. À cet effet, considérons $x \in E$ arbitraire. L'on écrit

$$x = x - p(x) + p(x)$$

et l'on remarque le fait que

$$x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p), \quad p(x) \in \mathrm{Im}(p).$$

La première relation utilise $p(p(x)) = p(x)$. On en déduit que $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.

Montrons maintenant $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Puisque $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Comme $p \circ p = p$, on a

$$x = p(y) = p(p(y)) = p(x) = 0\,.$$

On conclut que la somme est directe $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Comme $p \circ p = p$, chaque vecteur de $\mathrm{Im}(p) \setminus \{0\}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1 et la restriction de p à $\mathrm{Im}(p)$ est l'identité. Par définition les vecteurs de $\mathrm{Ker}(p) \setminus \{0\}$ sont vecteurs propres pour la valeur 0.

Pour justifier que p est diagonalisable on peut invoquer la définition/critère 0.2.3 du cours : l'espace E est somme directe d'espaces propres de p. De façon explicite, en dimension finie, soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de p. Donc p est diagonalisé dans cette base, de matrice $\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec r nombres 1 puis $n - r$ nombres 0 sur la diagonale. La matrice de p dans cette base est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 : Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ (c'est-à-dire $2 \neq 0$ dans k) et V un k-espace vectoriel. Une *symétrie de* V est un endomorphisme $s \in \mathrm{End}_k(V)$ tel que $s^2 = \mathrm{Id}_V$ (par définition $s^2 = s \circ s$). On se propose de montrer que s est diagonalisable avec valeurs propres ± 1.

a) On pose $p_\pm = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_V \pm s)$ et $V_\pm = \mathrm{Im}\, p_\pm$. Montrer que $p_\pm$ sont des projecteurs. Montrer que $V = V_+ \oplus V_-$ et que $V_\pm$ sont constitués de vecteurs propres correspondant à la valeur propre ± 1.

b) Conclure.

c) Si $s \neq \pm \mathrm{Id}_V$, alors V_+ et V_- sont simultanément non-nuls. L'endomorphisme s est la symétrie par rapport à V_+ parallèlement à V_-.

Solution de l'exercice 5. Cf. polycopié de cours, exemple 1.2.6.

On calcule
$$p_\pm^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_V \pm s)^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_V \pm 2s + s^2) = \frac{2}{4}(\mathrm{Id}_V \pm s) = p_\pm.$$
Par ailleurs on a les relations
$$p_- = \mathrm{Id}_V - p_+, \qquad p_+p_- = 0 = p_-p_+.$$
En effet : $\mathrm{Id}_V - p_+ = \mathrm{Id}_V - \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_V + s) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_V - s) = p_-$, et donc $p_+p_- = p_+(\mathrm{Id}_V - p_+) = p_+ - p_+^2 = 0$. Un calcul similaire montre $p_-p_+ = 0$.

Montrons maintenant $V = V_+ \oplus V_-$. Pour montrer la relation $V = V_+ + V_-$ nous utilisons la relation $p_- = \mathrm{Id}_V - p_+$, de sorte que tout élément $x \in V$ s'écrit
$$x = p_+(x) + p_-(x) \in \operatorname{Im} p_+ + \operatorname{Im} p_- = V_+ + V_-.$$
Pour montrer la relation $V_+ \cap V_- = \{0\}$, considérons un élément $x \in V_+ \cap V_-$. Puisque $x \in V_+ = \operatorname{Im} p_+$, il existe $y \in V$ tel que $x = p_+(y)$. Alors $p_-(x) = p_-p_+(y) = 0$. D'un autre côté, puisque $x \in V_- = \operatorname{Im} p_-$ l'on a $p_-(x) = x$. Ainsi $x = 0$.

On conclut que nous avons une décomposition en somme directe $V = V_+ \oplus V_-$.

On vérifie maintenant que, si $x \in V_\pm$, alors $s(x) = \pm x$. En effet, on écrit $x = p_\pm(y)$ et l'on calcule $s(x) = s\frac{1}{2}(\mathrm{Id}_V \pm s)(y) = \frac{1}{2}(s \pm \mathrm{Id}_V)(y) = \pm p_\pm(y) = \pm x$.

Ainsi $V_\pm$ sont des sous-espaces constitués de vecteurs propres pour les valeurs propres ± 1. Puisque $V = V_+ \oplus V_-$, on déduit que les espaces $V_\pm$ coïncident avec les espaces propres correspondant aux valeurs propres ± 1. En particulier s est diagonalisable.

Pour montrer c), décomposons de manière unique un vecteur $x \in V$ comme
$$x = x_+ + x_-$$
avec $x_\pm \in V_\pm$. Alors
$$s(x) = x_+ - x_-.$$
Ceci est par définition la symétrie par rapport à V_+ parallèlement à V_-.

Exercice 6 : On se place sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables de la droite réelle, à valeurs réelles. Soit $D(f) = f'$ l'application définie de E dans E qui associe à toute fonction $f \in E$ sa dérivée f'.

a) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de D.

b) Montrer que la famille $\{x \mapsto e^{\alpha x}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ d'éléments de E est libre.

Solution de l'exercice 6.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les solutions dans E de l'équation $f' = \lambda f$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = Ce^{\lambda x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Autrement dit, chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre, avec un espace propre de dimension 1 engendré par la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$.

b) C'est une application directe du théorème 0.2.2 du polycopié, affirmant que les sous-espaces propres sont en somme directe.

Exercice 7 : Soit $A, B \in M_n(k)$. On note P_A le polynôme caractéristique associé.

a) Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

b) Montrer que si A ou B est inversible, alors $P_{AB} = P_{BA}$.

c) Notons $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible en explicitant P^{-1}. Vérifier que $MP = PN$, puis montrer que $P_{AB} = P_{BA}$.

Solution de l'exercice 7. a) Soit $\lambda \in k$ valeur propre de AB. Ceci équivaut à l'existence d'un vecteur non-nul v tel que $ABv = \lambda v$. Alors $BA(Bv) = \lambda Bv$. On distingue maintenant deux cas.

i. Si $Bv \neq 0$, on déduit que λ est valeur propre de BA avec vecteur propre Bv.

ii. Si $Bv = 0$, alors nécessairement $\lambda = 0$. Pour montrer que $\lambda = 0$ est aussi valeur propre de BA il suffit de montrer que BA n'est pas inversible. Or un produit de matrices carrées est inversible si et seulement si chacun des facteurs est inversible. Puisque $Bv = 0$ avec $v \neq 0$ l'on déduit que B n'est pas inversible, donc BA n'est pas inversible non plus.

b) Si A est inversible alors

$$P_{AB}(X) = \det(A(BA - XI_n)A^{-1}) = \det(BA - XI_n) = P_{BA}(X)\,.$$

c) Montrons que la relation $P_{AB}(X) = P_{BA}(X)$ est encore vraie même si A et B ne sont pas inversibles. On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_n \end{pmatrix}$ car

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = z \\ Ax + y = t \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ t - Az = y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

L'égalité $MP = PN$ est une vérification directe :

$$\begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}.$$

On déduit $N = P^{-1}MP$ et donc $P_N(X) = P_M(X)$. D'un autre côté

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} BA - XI_n & -B \\ 0 & -XI_n \end{vmatrix} = (-1)^n X^n P_{BA}(X)\,,$$
$$P_N(X) = \begin{vmatrix} -XI_n & -B \\ 0 & AB - XI_n \end{vmatrix} = (-1)^n X^n P_{AB}(X)\,.$$

Donc $P_{BA}(X) = P_{AB}(X)$ par unicité de la factorisation des polynômes $P_N(X) = P_M(X)$.

Exercice 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Factoriser $P_A(X)$. Est-ce que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Solution de l'exercice 8. On développe suivant la deuxième ligne

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix}$$
$$= (1-X)((1-X)^2+1) = (1-X)(1-X-i)(1-X+i)\,.$$

Rappelons que si une matrice est diagonalisable sur un corps k, son polynôme caratéristique est produit de facteurs de degré un $(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)$, avec les λ_j, $j = 1,\ldots,n$ pas nécessairement distincts deux à deux. Cette condition est suffisante pour la diagonalisabilité si les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont deux à deux distinctes. Donc la matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car le polynôme $P_A(X) = (1-X)((1-X)^2+1)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Par contre, la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 9 : Soit $T = [t_{ij}] \in M_n(k)$ une matrice triangulaire. On suppose qu'il existe $\lambda \in k$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $t_{ii} = \lambda$. Montrer que T est diagonalisable ssi T est diagonale.

Solution de l'exercice 9. L'hypothèse entraine que la seule valeur propre de l'endomorphisme associé à T est λ.

Donc si T est diagonalisable, elle est semblable à la matrice $\mathrm{Diag}(\lambda, \dots, \lambda) = \lambda I_n$. Elle est donc égale à cette matrice : si $P^{-1}TP = \lambda I_n$ avec P inversible alors $T = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda I_n$; la matrice de l'homothétie de rapport λ est toujours égale à λI_n.

Exercice 10 : (i) La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier, puis tenter de la trigonaliser.

(ii) Même question pour la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 10. Notons M la matrice de l'exercice.

(i) La matrice est de rang un, d'image $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et de noyau ce même espace. Donc la matrice est nilpotente d'ordre deux : $M^2 = 0$. Cette matrice est non diagonalisable car une matrice nilpotente diagonalisable est nulle (voir correction de l'exercice précédant).

Une autre manière de raisonner consiste à calculer le polynôme caractéristique :

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -1 - X & 1 \\ -1 & 1 - X \end{vmatrix} = (-1 - X)(1 - X) + 1 = X^2.$$

Celui-ci admet une seule racine $\lambda = 0$ de multiplicité algébrique 2. La matrice M possède donc une seule valeur propre $\lambda = 0$. L'espace propre correspondant est de dimension 1, pas de dimension 2, donc la matrice n'est pas diagonalisable.

Par contre, cette matrice est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque son polynôme caractéristique est scindé à racines réelles. Plus précisément : $M(e_1 + e_2) = 0 \subset \mathbb{R}(e_1 + e_2)$ et $M(e_1, e_1 + e_2) = \mathbb{R}(e_1 + e_2) \subset Vect(e_1, e_1 + e_2)$. La matrice de l'endomorphisme associé à M dans la base $(e_1 + e_2, e_1)$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ceci peut être interprété dans la prespective de l'algorithme de trigonalisabilité, pp. 10-11 du polycopié. L'on choisit un générateur de l'espace propre pour la valeur propre $\lambda = 0$, ici $e_1 + e_2$, et ensuite on choisit un générateur pour un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$, ici e_1.

Remarque. On voit facilement si un matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ est trigonalisable ou diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique. Celui-ci est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi $\Delta \geq 0$. Si $\Delta > 0$, la matrice est diagonalisable. Si $\Delta = 0$, il y a une valeur propre double λ. Si la matrice est diagonalisable, elle sera égale à λI_2 dans une base diagonalisante donc dans toute base. Donc si $\Delta = 0$ et la matrice n'est pas diagonale, elle n'est pas diagonalisable. L'exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $(X - 1)^2$, est à comparer à l'exercice précédent.

La discussion sur $\mathbb{C}$ est analogue : tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$ donc toute matrice est trigonalisable. Pour les matrices 2×2, si $\Delta \neq 0$ alors il y a deux valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable. Si $\Delta = 0$ et la matrice est non diagonale, elle n'est pas diagonalisable.

Une rotation $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ qui n'est pas une symétrie ($\theta \neq k\pi$), a pour polynôme caractéristique $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ de discriminant $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta) < 0$ donc n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Par contre, le polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines distinctes conjuguées, $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$, et la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Une base de vecteurs propres est donnée par $(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix})$.

(ii)

$$\det(M - XI_3) = \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 0 \\ 2 & 2-X & -3 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} \underset{L_3 - L_1 \to L_3}{=} (1-X) \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 0 \\ 2 & 2-X & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\underset{C_1 + C_3 \to C_1}{=} (1-X) \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 0 \\ -1 & 2-X & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-X)(X^2 - X) = -X(X-1)^2 .$$

Donc la matrice est trigonalisable sur $\mathbb{R}$, 0 est valeur propre simple, 1 est valeur propre double. Une base du noyau est donnée par $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On étudie l'espace propre pour 1 : $M - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est de rang 2, son noyau est de dimension 1 engendré par $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice n'est pas diagonalisable.

Pour trigonaliser cette matrice, on note que si v_3 est un vecteur tel que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, la matrice de l'endomorphisme défini par M sera du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ et donc automatiquement triangulaire. Notons que le coefficient $(3,3)$ sera 1 car les valeurs propres d'un endomorphisme apparaissent sur la diagonale de la matrice de l'endomorphisme dans une base qui le trigonalise. Prenons $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors (v_1, v_2, v_3) est une base (un calcul de déterminant) et $Mv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3v_1 - 6v_2 + v_3$ (on résoud le système $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) . Dans cette base la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 : Soient E un k-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathrm{End}_k(E)$. On suppose u nilpotent, *i.e.* il existe un entier $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $u^d = 0$. Le plus petit entier vérifiant cette égalité est appelé *indice de nilpotence* de u.

a) Montrer que u n'est pas inversible.
b) Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
c) Montrer que l'indice de nilpotence de u est n si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ (où les $E_{i,j}$ désignent les matrices élémentaires).

Solution de l'exercice 11.

a) *Solution n^o 1.* Si u était inversible, il en serait de même pour u^d pour tout $d \geq 1$, puisqu'un produit de matrices inversibles est inversible. Or l'endomorphisme nul 0 n'est pas inversible si $n \geq 1$.
Solution n^o 2. Soit d_0 l'indice de nilpotence de u. Si u est non nul, $d_0 \geq 2$, $u^{d_0-1} \neq 0$ et $u^{d_0} = 0$. Donc $\mathrm{Im}(u^{d_0-1}) \subset \mathrm{Ker}(u)$. L'endomorphisme u^{d_0-1} étant non nul son image n'est pas réduite à $\{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u)$ contient un sous-espace non trivial. Donc u n'est pas inversible.
b) Si λ est une valeur propre de u et $x \neq 0$ un vecteur propre correspondant, $0 = u^{d_0}(x) = \lambda^{d_0} x$. Le vecteur x étant non nul, $\lambda^{d_0} = 0$ et $\lambda = 0$. Donc la seule valeur propre de u est 0 et l'espace propre associé est $\mathrm{Ker}(u)$.
c) Supposons que $d_0 = n = \dim(E)$. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$ et considérons $\mathcal{B} = (u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, u(x), x)$. Nous affirmons que $\mathcal{B}$ est une base de E. Pour le démontrer

il suffit de montrer que les vecteurs $x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)$ forment une famille libre. Appliquons $\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1}$ à une relation linéaire $\lambda_{n-1}u^{n-1}(x) + \ldots + \lambda_0 x = 0$. En notant que $u^i = 0$ si $i \geq n$, on a :

$$\begin{array}{rll}
\lambda_{n-1}u^{n-1}(x) + \lambda_{n-2}u^{n-2}(x) + \ldots + \lambda_0 x & = 0 & \leftarrow Id \\
0 + \lambda_{n-2}u^{n-1}(x) + \ldots + \lambda_0 u(x) & = 0 & \leftarrow u \\
\vdots & \vdots & \\
0 + \ldots + \lambda_1 u^{n-1}(x) + \lambda_0 u^{n-2}(x) & = 0 & \leftarrow u^{n-2} \\
0 + \ldots + 0 + \lambda_0 u^{n-1}(x) & = 0 & \leftarrow u^{n-1}
\end{array}$$

la dernière ligne entraine $\lambda_0 = 0$ car $u^{n-1}(x) \neq 0$. L'avant dernière entraine $\lambda_1 = 0$. On déduit ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.
La matrice de u dans la base B est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

car $u(u^{n-1}(x)) = 0$, $u(u^{n-2}(x)) = u^{n-1}(x), \ldots, u(x) = u(x)$.
Réciproquement si la matrice de u dans une base $(v_1, \ldots, v_n)$ est égale à la matrice ci-dessus, $u(v_n) = v_{n-1}, \ldots, u(v_2) = v_1, u(v_1) = 0$. Donc $u^n = 0$, $u^{n-1} \neq 0$. L'endomorphisme est nilpotent d'ordre n.