Feuille de TD n° 2

Supplémentaires, trigonalisation, polynômes d'endomorphismes

Exercice 1 : (Supplémentaires) Calculer des supplémentaires des sous-espaces vectoriels suivants. Dans chaque exemple e_i désigne le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

(i) $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \subset \mathbb{C}^4$.

(ii) $E = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_4) \subset \mathbb{C}^5$.

(iii) $E = \mathrm{Vect}(3e_1 + 4e_2 + e_3) \subset \mathbb{C}^3$.

(iv) $E = \mathrm{Vect}(3e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2 + e_3) \subset \mathbb{C}^3$.

(v) $E = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3 + e_4, e_1 - e_2, e_3 + e_4) \subset \mathbb{C}^4$.

Exercice 2 : Justifier que les matrices suivantes sont diagonalisables. Les diagonaliser dans $M_n(\mathbb{C})$ et donner la matrice de passage.

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Justifier que les matrices suivantes ne sont pas diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$, mais qu'elles sont trigonalisables. Les trigonaliser et donner la matrice de passage.

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : (Automorphismes d'ordre fini de $\mathbb{C}^n$)

(i) Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ tel que $u^d = \mathrm{Id}_V$ pour un entier $d \geq 1$ (dans ce cas, on dit que u est un *automorphisme d'ordre fini*). Montrer que u est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines d-èmes de l'unité.

(ii) Retrouver le fait que les symétries de V sont diagonalisables.

(iii) Que se passe-t-il si l'on travaille à coefficients réels à la place des coefficients complexes ?

Exercice 5 : (Projecteurs) Soit V un k-espace vectoriel. On rappelle que $p \in \mathrm{End}_k(V)$ est un projecteur si $p^2 = p$. Redémontrer le fait que les projecteurs sont diagonalisables à l'aide d'un résultat de cours sur les polynômes d'endomorphismes.

Exercice 6 : (Théorème de Cayley-Hamilton en dimension 2)
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

(i) Montrer la relation

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det AI_2 = 0.$$

Faire le lien avec le théorème de Cayley-Hamilton.

(ii) Supposons A inversible. Exprimer A^{-1} en fonction de A, $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det A$. En déduire la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 : Soit $A \in M_n(k)$ inversible. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimer $(\det A)A^{-1}$ comme un polynôme en A (dont les coefficients dépendent de A).

Exercice 8 : (Caractérisation des sous-espaces caractéristiques) Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u de multiplicité algébrique respective $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $V_{(\lambda)} = \ker(u - \lambda \,\mathrm{Id})^m \subset V$ le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ.

Montrer l'égalité

$$V_{(\lambda)} = \{x \in V \mid \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } (u - \lambda \,\mathrm{Id}_V)^p(x) = 0\}.$$

Autrement dit, l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$ est l'ensemble des $x \in V$ qui sont annulés par une *certaine puissance* de $(u - \lambda \,\mathrm{Id}_V)$.