Feuille de TD n° 2

Supplémentaires, trigonalisation, polynômes d'endomorphismes

Exercice 1 : (Supplémentaires) Calculer des supplémentaires des sous-espaces vectoriels suivants. Dans chaque exemple e_i désigne le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

(i) $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \subset \mathbb{C}^4$.

(ii) $E = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_4) \subset \mathbb{C}^5$.

(iii) $E = \mathrm{Vect}(3e_1 + 4e_2 + e_3) \subset \mathbb{C}^3$.

(iv) $E = \mathrm{Vect}(3e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2 + e_3) \subset \mathbb{C}^3$.

(v) $E = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3 + e_4, e_1 - e_2, e_3 + e_4) \subset \mathbb{C}^4$.

Solution de l'exercice 1. Nous allons construire un supplémentaire E' en échelonnant une base de E.

(i) La base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E est déjà échelonnée. On peut choisir $E' = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$.

(ii) Une base échelonnée est $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 + e_3, -e_2 - e_3 + e_4)$. On peut choisir comme supplémentaire $E' = \mathrm{Vect}(e_3, e_4, e_5)$, mais aussi $E' = \mathrm{Vect}(e_2, e_4, e_5)$ ou $E' = \mathrm{Vect}(e_2, e_3, e_5)$.

(iii) E est une droite vectorielle, un supplémentaire est un hyperplan. On peut choisir pour supplémentaire $E' = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ ou $E' = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ ou $E' = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

(iv) Une base échelonnée de E est $\mathcal{B} = (e_1 - e_2 + e_3, e_2 - e_3)$, un supplémentaire est $E' = \mathrm{Vect}(e_3)$.

Remarque. E est un hyperplan d'équation $y + z = 0$. Pour le voir, on note que les vecteurs de $\mathcal{B}$ vérifient cette équation ou bien on écrit que les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de cet hyperplan sont combinaisons linéaires d'élément de $\mathcal{B}$ donc $0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = (z + y) + x \cdot 0$. Donc tout vecteur ne vérifiant pas cette équation engendrera un supplémentaire de E, par exemple e_2 ou e_3.

(v) $\mathcal{B} = (e_1 - e_2, e_2 + e_3 + e_4, e_3 + e_4)$ est une base échelonnée de E. Un supplémentaire est $E' = \mathrm{Vect}(e_4)$. On remarque que E est l'hyperplan d'équation $z = t$ donc tout vecteur ne vérifiant pas cette équation engendrera un supplémentaire de E dans $\mathbb{C}^4$.

Exercice 2 : Justifier que les matrices suivantes sont diagonalisables. Les diagonaliser dans $M_n(\mathbb{C})$ et donner la matrice de passage.

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 2.

(i) Calculons le polynôme caractéristique de A : $\det(A-XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2+C_3\to C_1}{=}$ $(1-X)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ 1 & 2 & 1-X \end{vmatrix} \underset{L_2-L_1,\, L_3-L_1}{=} (1-X)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(-4-X)(2-X)$. Il y a trois valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable.

$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, l'équation $(A-I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ entraine $x = y$, puis on utilise la première équation et $y = z$. Le vecteur $e_1 + e_2 + e_3$ est propre pour la valeur propre 1.

$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, l'équation $(A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ entraine $3x = 4y$, on peut choisir $(x,y) = (4,3)$ et la première ligne entraine $z = -2$. Donc le vecteur $4e_1 + 3e_2 - 2e_3$ est propre pour la valeur propre 2.

$A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, l'équation $(A+4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ entraine $3x = -2y$. On peut choisir $(x,y) = (2,-3)$ (seconde ligne) donc $z = 2$ (première ligne), le vecteur $2e_1 - 3e_2 + 2e_3$ est propre pour la valeur propre -4.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres ci-dessus. Alors $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1,2,-4)$.

(ii)

$$\det(A - XI_4) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -X & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -X & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -X \\ -X & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -X \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = (X^2+1)^2 .$$

On passe du premier déterminant au second par une permutation circulaire des colonnes (C_4, C_1, C_2, C_3) puis du second au troisième par une permutation circulaire des lignes (L_4, L_1, L_2, L_3). Cela revient à écrire le déterminant dans la base (e_4, e_1, e_2, e_3). Puis on développe un déterminant de matrice diagonale par blocs.

On pouvait bien entendu directement développer suivant la première ligne :

$$\det(A - XI_4) = -X\begin{vmatrix} -X & -1 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -X & -1 & 0 \\ 1 & -X & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-X)^2(X^2+1) + 1.1.(X^2+1) = (X^2+1)^2 .$$

Donc $\det(A - XI_4) = (X+i)^2(X-i)^2$.

L'équation de l'espace propre pour i est $\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$. On remarque que $iL_2 = L_3$ et $iL_4 = L_1$ et que L_1 et L_2 sont indépendantes. La matrice $A - iI_4$ est de rang deux, son noyau est de dimension deux. Donc l'équation est équivalente à $\begin{cases} -ix+t=0 \\ -iy-z=0 \end{cases}$ et $V_i = \mathrm{Vect}(e_1+ie_4, e_2-ie_3)$.

De même l'équation pour l'espace propre $-i$ est $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$ et un calcul analogue au précédent entraine $V_{-i} = \mathrm{Vect}(e_1-ie_4, e_2+ie_3)$. La matrice est diagonalisable car il y a deux sous-espaces propres distincts, donc en somme directe, et la somme de leurs dimension est 4. La matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & i \\ i & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme défini par A est $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Remarques.

a) On a trouvé, pour la matrice réelle A, des valeurs propres complexes conjuguées ainsi que des vecteurs propres conjugués $\overline{e_1+ie_4} = e_1 - ie_4$. C'est un phénomène général : Les valeurs propres complexes non réelles d'une matrice à coefficients réels A sont deux à deux conjuguées. Si $v \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, alors le vecteur $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$, obtenu en conjugant les coordonnées de v, est vecteur propre pour la valeur propre $\bar{\lambda}$.

Pour une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, définissons $\bar{M}$ en conjugant chacun de ses coefficients i.e. $(\bar{M})_{ij} = \overline{M_{ij}}$. Si $(M,N) \in M_{(m,l)}(\mathbb{C}) \times M_{(l,n)}(\mathbb{C})$ comme

$$\overline{\sum_{j=1}^{l} M_{ij}N_{jk}} = \sum_{j=1}^{l} \bar{M}_{ij}\bar{N}_{jk}\,,$$

on obtient $\overline{M \cdot N} = \bar{M} \cdot \bar{N}$ et la conjugaison d'un produit ou d'une somme de matrice est le produit, respectivement la somme des conjuguées.

L'équation des vecteurs propres $A \cdot v = \lambda \cdot v$ se conjugue en

$$\overline{A \cdot v} = \overline{\lambda \cdot v} \iff \bar{A} \cdot \bar{v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v} \iff A \cdot \bar{v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v},$$

car A est à coefficients réels.

b) L'endomorphisme défini par A est la somme directe des rotations de $\frac{\pi}{2}$ dans les plans orientés (e_4, e_1) et (e_2, e_3). Comme on l'a vu au précédent TD, le vecteur propre d'une rotation pour la valeur propre $\pm i$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$. Ce que l'on retrouve ici, par exemple $e_1 + ie_4 = i(e_4 - ie_1)$ est colinéaire au vecteur $e_4 - ie_1$ dont l'expression dans la base (e_4, e_1) est $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

La matrice de l'endomorphisme associé à A dans la base (e_4, e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ car la matrice d'un endomorphisme dans cette base s'obtient à partir de la matrice de l'endomorphisme dans la base canonique en faisant une permutation circulaire de colonnes $C_4 \to C_1 \to C_2 \dots$ puis des lignes $L_4 \to L_1 \to L_2 \dots$. C'est ce que l'on a fait pour le calcul du polynôme caractéristique.

Exercice 3 : Justifier que les matrices suivantes ne sont pas diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$, mais qu'elles sont trigonalisables. Les trigonaliser et donner la matrice de passage.

$$(i)\quad A=\begin{pmatrix}1&4&-2\\0&6&-3\\-1&4&0\end{pmatrix},\qquad\qquad (ii)\quad A=\begin{pmatrix}2&2&-3\\5&1&-5\\-3&4&0\end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 3.

(i) On a

$$\det(A-XI_3)=\begin{vmatrix}1-X&4&-2\\0&6-X&-3\\-1&4&-X\end{vmatrix}\underset{C_1+C_2+C_4\to C_1}{=}(3-X)\begin{vmatrix}1&4&-2\\1&6-X&-3\\1&4&-X\end{vmatrix}$$
$$\underset{L_2-L_1,L_3-L_1}{=}(3-X)\begin{vmatrix}1&4&-2\\0&2-X&-1\\0&0&2-X\end{vmatrix}=(3-X)(2-X)^2.$$

On étudie le sous-espace propre V_2 associé à la valeur propre 2 : $A-2\,\mathrm{Id}=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\0&4&-3\\-1&4&-2\end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang deux, les deux premières lignes sont indépendantes, donc le noyau de l'endomorphisme associé est de dimension 1, engendré par $\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$. La multiplicité géométrique (ici 1) étant strictement plus petite que la multiplicité algébrique (ici 2), la matrice n'est pas diagonalisable.

Comme $A-3I_3=\begin{pmatrix}-2&4&-2\\0&3&-3\\-1&4&-3\end{pmatrix}$,

on voit que $V_3=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$ (la seconde ligne entraine $y=z$, couplée à la dernière, on trouve $x=y=z$). Pour trigonaliser l'endomorphisme u associé à A, on choisit un supplémentaire de $V_3\oplus V_2$, par exemple $\mathrm{Vect}(e_3)$. Comme $u(e_3)=\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=v_2-6v_1+2v_3$, la matrice de u dans la base (v_1,v_2,v_3) est $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&-6\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ avec P la matrice de passage de la base canonique vers la base $(v_1,v_2,v_3)=(e_1+e_2+e_3,4e_1+3e_2+4e_3,e_3)$: $P=\begin{pmatrix}1&4&0\\1&3&0\\1&4&1\end{pmatrix}$.

(ii)

$$\det(A-XI_3)=\begin{vmatrix}2-X&2&-3\\5&1-X&-5\\-3&4&-X\end{vmatrix}=(1-X)\begin{vmatrix}1&2&-3\\1&1-X&-5\\1&4&-X\end{vmatrix}$$
$$=(1-X)\begin{vmatrix}1&2&-3\\0&-1-X&-2\\0&2&-X+3\end{vmatrix}=(1-X)\begin{vmatrix}-1-X&-2\\2&-X+3\end{vmatrix}=(1-X)(X-1)^2.$$

Etudions l'espace propre associé à la valeur propre 1 : $\begin{pmatrix}1&2&-3\\5&0&-5\\-3&4&-1\end{pmatrix}$ est de rang 2 (on sait qu'elle n'est pas de rang 3 et on voit que les deux premières lignes sont indépendantes). Son noyau est de dimension 1 engendré par $e_1+e_2+e_3$.

Pour trigonaliser l'endomorphisme associé à A, nous suivons la démonstration du théorème de trigonalisation d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé.

On a $E = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3) \oplus \mathrm{Vect}(e_2,e_3)$. La matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B} = (e_1+e_2+e_3, e_2, e_3)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trigonalisons l'endomorphisme v de $\mathrm{Vect}(e_2,e_3)$ dont la matrice dans la base (e_2,e_3) est $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a $v = p \circ u_{|\,\mathrm{Vect}(e_2,e_3)}$ avec p la projection sur $\mathrm{Vect}(e_2,e_3)$ parallèlement à $\ker(u-\mathrm{id})$. Son polynôme caractéristique est $(1-X)^2$. Le sous-espace propre de v pour la valeur propre 1 est le noyau de $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Vect}(e_2-e_3)$. On choisit $\mathrm{Vect}(e_3)$ comme supplémentaire dans $\mathrm{Vect}(e_2,e_3)$. Comme $v(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2(e_2-e_3)+e_3$, la matrice de v dans la base (e_2,e_3) est $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme (e_2-e_3,e_3) est une base de $\mathrm{Vect}(e_2,e_3)$, $(e_1+e_2+e_3, e_2-e_3, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de l'endomorphisme u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques

a) Rappelons qu'une décomposition en somme directe $E = A_1 \oplus A_2$ en deux sous-espaces détermine deux projecteurs $p_1, p_2 \in \mathrm{End}(E)$: si $x = x_1 + x_2$ est la décomposition de $x \in E$ dans cette somme directe alors

$$\begin{aligned} p_1 : E \to E \quad & x \mapsto p_1(x) = x_1\,, \\ p_2 : E \to E \quad & x \mapsto p_2(x) = x_2\,. \end{aligned}$$

On dit que p_1 est le projecteur sur A_1 parallèlement à A_2. On note que $p_1+p_2 = \mathrm{id}_E$. De manière équivalente, si p est un projecteur, ie $p^2 = p$, alors $\mathrm{id}-p$ est un projecteur et $\ker(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}-p)$, $\mathrm{Im}(p) = \ker(1-p)$, on a $p + (\mathrm{id}-p) = \mathrm{id}$ et $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

b) Le polynôme caractéristique de v est celui de u divisé par le facteur $(1-X)$ car

$$\mathrm{M}at_{\mathcal{B}}(u - X\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1-X & 2 & -3 \\ 0 & -1-X & -2 \\ 0 & 2 & 3-X \end{pmatrix}$$

est trigonale par bloc donc son déterminant, qui est le polynôme caractéristique de u, est égal à $(1-X) \cdot \begin{vmatrix} -1-X & -2 \\ 2 & 3-X \end{vmatrix}$. Donc le polynôme caractéristique de v est $(X-1)^2$.

c) Posons $f_1 = e_1+e_2+e_3$, $f_2 = e_2-e_3$, $f_3 = e_3$.
- $\mathrm{Vect}(f_1) = \ker(p)$ est espace propre pour u.
- f_2 est vecteur propre de $v = p \circ u_{|\,\mathrm{Vect}(f_2,f_3)}$ et $u(f_2) \in \mathrm{Vect}(f_2) + \ker(p) = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ car $u = (1-p) \circ u_{|\,\mathrm{Vect}(f_2,f_3)} + p \circ u_{|\,\mathrm{Vect}(f_2,f_3)}$. Le premier endomorphisme est à valeurs dans $\ker(p)$, le second est v.
- $v(f_3) \in \mathrm{Vect}(f_2,f_3)$ donc $u(f_3) \in \mathrm{Vect}(f_2,f_3) + \ker(p) = \mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)$.

On a ainsi construit une base (f_1,f_2,f_3) telle que $u(f_1) \subset \mathrm{Vect}(f_1)$, $u(\mathrm{Vect}(f_1,f_2)) \subset \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ et $u(\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)) \subset \mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)$. La matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure.

Donc lorsque l'on trigonalise $v = p \circ u_{|\text{ supplémentaire des sous-espaces propres}}$ puis que l'on considère l'action de u, on ne rajoute que des éléments de $\ker(p) =$ sous-espaces propres.

Exercice 4 : (Automorphismes d'ordre fini de $\mathbb{C}^n$)

(i) Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ tel que $u^d = \mathrm{Id}_V$ pour un entier $d \geq 1$ (dans ce cas, on dit que u est un *automorphisme d'ordre fini*). Montrer que u est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines d-èmes de l'unité.

(ii) Retrouver le fait que les symétries de V sont diagonalisables.

(iii) Que se passe-t-il si l'on travaille à coefficients réels à la place des coefficients complexes ?

Solution de l'exercice 4. (i) Le polynôme $P(X) = X^d - 1$ annule u. Ses racines sont les racines d-èmes de l'unité et sont toutes distinctes, à savoir $\lambda_\ell = \exp(\dfrac{2i\ell\pi}{d}) = \cos\left(\dfrac{2i\ell\pi}{d}\right) + i\sin\left(\dfrac{2i\ell\pi}{d}\right)$ pour $\ell = 0, 1, \dots d-1$. Le lemme des noyaux entraine que

$$V = \ker(P(u)) = \oplus_{\ell=0}^{d-1} \ker(u - \lambda_\ell \mathrm{id})$$

Par un théorème du cours, l'endomorphisme u est diagonalisable et ses valeurs propres se trouvent parmi les racines de P. Retenons seulement les facteurs non nuls dans la somme directe ci-dessus, c'est à dire les espaces propres $V_\ell = \ker(u - \lambda_\ell \mathrm{id}) \neq \{0\}$. On a encore

$$V = \oplus_{0 \leq \ell \leq d-1,\, V_\ell \neq \{0\}} \ker(u - \lambda_\ell \mathrm{id})$$

et u est diagonalisable.

(ii) Les symétries de V sont d'ordre deux et se diagonalisent en fonction des points fixes et anti-fixes (voir cours).

(iii) À coefficients réels les symétries restent diagonalisables sur $\mathbb{R}$ puisque $\pm 1 \in \mathbb{R}$. Par contre, les endomorphismes d'ordre fini ≥ 3 ne sont pas nécessairement diagonalisables. Exemple : la rotation d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Remarques : Donnons d'autres exemples d'endomorphismes d'ordre fini. Une rotation u d'angle $\frac{2\pi}{d}$ est d'ordre d et seuls les espaces propres (sur $\mathbb{C}$) $\ker(u - e^{i\frac{2\pi}{d}} \mathrm{id})$ et $\ker(u - e^{-i\frac{2\pi}{d}} \mathrm{id})$ sont non triviaux.

En général, prenons une base quelconque $(e_1, \dots, e_n)$ de V et définissons un endomorphisme u de V par sa matrice dans cette base, $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i^d = 1$. Alors $u^d = \mathrm{id}$, et les valeurs propres de u ne sont pas nécessairement toutes les racines $d-$ième de l'unité.

Si on veut faire apparaitre toute les racines $d-$ièmes de l'unité, on doit avoir $n \geq d$ et dans une base diagonalisante la matrice de u est $\mathrm{Diag}(1, \dots, \omega, \dots, \omega^2, \dots, \omega^{d-1}, \dots)$ avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{d}}$. Ici les pointillés sont tels que le nombre d'éléments diagonaux est n par exemple pour $d = 2$ et $n = 3$ on peut avoir $\mathrm{Diag}(1, 1, -1)$ ou $\mathrm{Diag}(1, -1, -1)$.

Exercice 5 : (Projecteurs) Soit V un k-espace vectoriel. On rappelle que $p \in \mathrm{End}_k(V)$ est un projecteur si $p^2 = p$. Redémontrer le fait que les projecteurs sont diagonalisables à l'aide d'un résultat de cours sur les polynômes d'endomorphismes.

Solution de l'exercice 5. Le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est scindé à racines simples dans k et annule p, on applique la proposition 1.4.7 .

Exercice 6 : (Théorème de Cayley-Hamilton en dimension 2)
Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

(i) Montrer la relation
$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det AI_2 = 0.$$

Faire le lien avec le théorème de Cayley-Hamilton.

(ii) Supposons A inversible. Exprimer A^{-1} en fonction de A, $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det A$. En déduire la formule
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 6. (i) Cette expression est $P_A(A)$, où P_A est le polynôme caractéristique de A. Mais on peut faire directement le calcul :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}, \\
Tr(A)A &= \begin{pmatrix} a^2 + da & ab + db \\ ac + dc & ad + d^2 \end{pmatrix}, \\
\det(A)I_2 &= \begin{pmatrix} ad - cb & 0 \\ 0 & ad - cb \end{pmatrix}, \\
A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

(ii) En multipliant par A^{-1} nous obtenons $A - \mathrm{Tr}(A)I_2 + (\det A)A^{-1} = 0$, ou encore
$$A^{-1} = 1/\det(A)(\mathrm{Tr}(A)I_2 - A) = \frac{1}{ad - cb}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 : Soit $A \in M_n(k)$ inversible. À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimer $(\det A)A^{-1}$ comme un polynôme en A (dont les coefficients dépendent de A).

Solution de l'exercice 7. On multiplie l'égalité $P_A(A) = 0$ par $(\det A)A^{-1}$:

$$P_A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i} \quad \text{avec} \quad a_0 = (-1)^n, \quad a_1 = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A), \quad a_0 = (\det A)$$
$$0 = (\det A)A^{-1} \cdot P_A(A) = (\det A)A^{-1} \cdot (\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{n-i}) + A^{-1}$$
$$A^{-1} = -(\det A)(\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{n-i-1}) = -(\det A)(\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k-1} A^k)\,.$$

Exercice 8 : (Caractérisation des sous-espaces caractéristiques) Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u de multiplicité algébrique respective $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $V_{(\lambda)} = \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id})^m \subset V$ le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ.

Montrer l'égalité
$$V_{(\lambda)} = \{x \in V \mid \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } (u - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^p(x) = 0\}.$$

Autrement dit, l'espace caractéristique $V_{(\lambda)}$ est l'ensemble des $x \in V$ qui sont annulés par une *certaine puissance* de $(u - \lambda \operatorname{Id}_V)$.

Solution de l'exercice 8. L'inclusion $\subseteq$ est claire, prouvons la réciproque. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u, de multiplicités respectives $m_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \dots, r$. Supposons sans perte de généralité $\lambda = \lambda_1$ et $m = m_1$. Supposons que $(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_V)^p(x) = 0$. On peut écrire $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$, avec $x_i \in V_{(\lambda_i)}$. Comme chaque $V_{(\lambda_i)}$ est stable par u donc aussi par $u - \lambda_1 \operatorname{Id}_V$, l'égalité

$$0 = (u - \lambda_1 \operatorname{Id}_V)^p(x) = (u - \lambda_1 \operatorname{Id}_V)^p(x_1) + \cdots + (u - \lambda_1 \operatorname{Id}_V)^p(x_r)$$

jointe au fait que les $V_{(\lambda_i)}$ sont en somme directe, entraîne que $(u - \lambda_1 \operatorname{Id}_V)^p(x_i) = 0$ pour tout i. Or la restriction u_i de u à $V_{(\lambda_i)}$ a pour polynôme caractéristique $(\lambda_i - X)^{m_i}$, donc $\det(u_i - \lambda_1 \operatorname{Id}_{V_i}) = (\lambda_i - \lambda_1)^{m_i}$ est non nul lorsque $i \neq 1$, donc l'égalité $(u - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^p(x_i) = 0$ entraîne $x_i = 0$ pour $i \neq 1$. Ainsi x égale x_1 et appartient donc à $V_{(\lambda_1)}$.