Feuille de TD n° 3

Diagonalisation, trigonalisation, polynômes d'endomorphismes

Exercice 1 : (Rotations) Soit

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

(i) Déterminer les angles θ pour lesquels R_θ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que R_θ est toujours diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner sa forme diagonale.

(iii) Expliciter le cas $\theta = \pi/2$. (On appelle $J = R_{\pi/2}$ *la structure complexe standard sur* $\mathbb{R}^2$.)

Exercice 2 : (Puissances de matrices) (i) Soit $A \in M_n(k)$ une matrice diagonalisable et $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $P^{-1}AP = D$, où $D \in M_n(k)$ est diagonale. Montrer l'égalité

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

pour tout $n \geq 0$. Étendre cette égalité à tout $n \in \mathbb{Z}$ lorsque A est inversible.

(ii) Calculer A^n pour $n \geq 0$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 28 & -13 \end{pmatrix}, \quad \text{respectivement} \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : (Diagonalisation simultanée) Soient V un k-espace vectoriel et $u, v \in \mathrm{End}_k(V)$. On dit que *$u$ et v commutent* si $uv = vu$. On dit que *u et v sont simultanément diagonalisables* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que les matrices $M_\mathcal{B}(u)$ et $M_\mathcal{B}(v)$ soient toutes les deux diagonales.

Dans cet exercice nous supposons V de dimension finie.

1. Nous nous proposons de montrer le résultat suivant :

Soient $u, v \in \mathrm{End}_k(V)$ diagonalisables. Alors u et v commutent $\Leftrightarrow$ u et v sont simultanément diagonalisables.

(i) Montrer l'implication inverse $\Leftarrow$.

(ii) Montrer que tout espace propre de u est stable par v. Conclure en utilisant la Proposition 1.2.4 du polycopié, dont on pourra se rappeler la démonstration. (*La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est encore diagonalisable.*)

2. Donner des exemples d'endomorphismes u, v diagonalisables qui ne commutent pas.

3. Montrer que, si u et v sont diagonalisables et commutent, alors $u + v$ et uv sont diagonalisables.

4. Donner un exemple d'endomorphismes diagonalisables, qui ne commutent pas, tels que $u + v$ ou uv ne soient pas diagonalisables. (L'on pourra prendre V de dimension 2.)

5. Montrer que, si u et v commutent, alors

$$(u + v)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} u^i v^{p-i}, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4 : (Approximation par des matrices inversibles) Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$. Parmi les matrices de la forme $A_\lambda = A + \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, quelles sont celles qui sont inversibles ? Montrer qu'il existe une suite (λ_k) tendant vers zéro telle que toutes les matrices A_{λ_k} sont inversibles et la suite A_{λ_k} converge vers A, au sens où les coefficients des A_{λ_k} convergent vers ceux de A.

Exercice 5 : (Approximation par des matrices diagonalisables) Montrer que les matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$. Autrement dit, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ il existe une suite $A_k \in M_n(\mathbb{C})$, $k \geq 1$ telle que $A_k \to A$ pour $k \to \infty$, au sens où, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $A_k(i,j) \to A(i,j)$ pour $k \to \infty$. Ici $A(i,j)$ désigne le coefficient (i,j) de la matrice A.

Exercice 6 : (i) Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel vérifiant $u^3 = \mathrm{Id}$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

(ii) Soient u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel et $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de u. On suppose qu'on peut écrire $P = QR$, avec Q et R premiers entre eux. Montrer que $\mathrm{Im}(Q(u)) = \mathrm{Ker}(R(u))$.

Exercice 7 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^3 = A^2$.

(i) Montrer que A^2 est diagonalisable.

(ii) Trouver une telle matrice A non diagonalisable.

2. On suppose que $A^{k+1} = A^k$, avec $k > 0$ un entier. Montrer que A^k est diagonalisable.

Exercice 8 : Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
.

(i) Déterminer le polynôme caractéristique de A ;

(ii) Déterminer le polynôme minimal de A ;

(iii) En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 9 : Soit $A \in M_n(K)$, avec K égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que A vérifie la relation
$$A^2 + A + I_n = 0.$$

1. On suppose $K = \mathbb{C}$. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

2. On suppose $K = \mathbb{R}$.

(i) Montrer que la matrice A n'est pas trigonalisable.

(ii) Montrer que n est un entier pair.

(iii) On suppose que $n = 2$. Construire une telle matrice.

(iv) Trouver, à l'aide de la question précédente et pour tout entier n pair, une matrice réelle A d'ordre n vérifiant la relation $A^2 + A + I_n = 0$.

Exercice 10 : (Endomorphismes définis par des permutations) Le but de cet exercice est d'étudier des exemples d'endomorphismes définis par une permutation des vecteurs d'une base d'un espace vectoriel. Plus précisément si E est un $k-$espace vectoriel, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et si $\sigma \in S_n$ est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, on définit $u_{\sigma,\mathcal{B}}$ par son action sur la base :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_{\sigma,\mathcal{B}}(e_i) = e_{\sigma(n)} .$$

Dans la suite, on notera simplement u l'endomorphisme ainsi défini si σ et $\mathcal{B}$ sont fixés et qu'il n'y a pas de confusion possible. Si v est un endomorphisme d'un $k-$espace vectoriel V, on notera μ_v le polynôme minimal de v et χ_v son polynôme charactéristique.

a) Un exemple : la base étant fixée, on suppose que σ est la permutation circulaire $(1, \ldots, n) \mapsto (n, 1, \ldots, n-1)$.

  i) Montrer que le polynôme caractéristique de u est $(-1)^n(X^n - 1)$. En déduire que u est diagonalisable.

  ii) Montrer qu'un polynôme P qui annule u et tel que $deg(P) < n$ est nécessairement le polynôme nul. En déduire que le polynôme minimal de u est $X^n - 1$.

  iii) On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour $1 \leq k \leq n$, soit $x_k = \sum_{i=1}^{n} (\omega^k)^{n-i+1} e_i$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de vecteurs propres et donner la matrice de u dans cette base.

b) On revient au cas général. On établit deux résultats préliminaires.

  i) On suppose que $E = \oplus_{i=1}^{k} E_i$ est somme directe de sous-espaces non nuls et stables par $v \in \mathrm{End}_k(E)$. Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, on note v_i l'endomorphisme de E_i induit par v.
  Montrer que $\mu_v = PPCM(\mu_{v_1}, \ldots, \mu_{v_k})$ et que $\chi_v = \chi_{v_1} \cdot \ldots \cdot \chi_{v_k}$.

  ii) Montrer (ou rappeler) qu'une permutation $\sigma \in S_n$ est le produit d'un nombre fini de cycles de supports disjoints $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$. On note $\mathrm{supp}(\sigma_i) \subset \{1, \ldots, n\}$ le support de σ_i et m_i son cardinal.

c) Un exemple : on suppose $n = 5$ et $\sigma : (1, \ldots, 5) \mapsto (3, 5, 4, 1, 2)$ alors $\sigma = (3, 4, 1) \cdot (5, 2)$, $\sigma_1 = (3, 4, 1)$, $\mathrm{supp}(\sigma_1) = \{1, 3, 4\}$, $\sigma_2 = (5, 2)$, $\mathrm{supp}(\sigma_2) = \{2, 5\}$.
Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_4)$ et $\mathrm{Vect}(e_2, e_5)$ sont stables par u. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u.

d) En général, on note $E_k = \mathrm{Vect}(e_i, i \in \mathrm{supp}(\sigma_i))$. Montrer que $E = \oplus_{i=1}^{k} E_i$, montrer que E_i est stable par u. On note u_{σ_i} l 'endomorphisme de E_i induit par u. Montrer que $\chi_u = \Pi_{i=1}^{k}(X^{m_i} - 1)$ et $\mu_u = PPCM\{X^{m_i} - 1, i = 1, \ldots, k\}$. Montrer que u est d'ordre $PPCM(m_i, i = 1 \ldots, k)$.

e) On suppose $n = 4$. Donner la liste des paires (μ_u, χ_u) possibles.

Exercice 11 : (Une autre démonstration de théorème de Cayley-Hamilton) Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n et $f \in \mathrm{End}_K(E)$. On veut montrer que le polynôme caractéristique P_f est un annulateur de f, c'est-à-dire $P_f(f) = 0$.

(i) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Justifier qu'il existe un entier p avec $0 \leq p \leq n-1$ tel que le système $(x, f(x), ..., f^p(x))$ soit libre et le système $(x, f(x), ..., f^p(x), f^{p+1}(x))$ soit lié.

(ii) On note $G = \mathrm{Vect}(x, f(x), ..., f^p(x))$ et f_G la restriction de f à G. Écrire la matrice de f_G dans la base $(x, f(x), ..., f^p(x))$ et montrer que

$$P_{f_G}(f_G) = 0.$$

(iii) Conclure par récurrence sur $n \geq 1$.