Feuille de TD No. 4

Décompositions de Dunford et Jordan

1 Pratique des décompositions

1.1 Décomposition de Dunford

Exercice 1 : Calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes ($a, b \neq 0$).

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 2 & b \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Même question avec les matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Même question avec les matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 1 & b \\ & & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.2 Réduction de Jordan

Exercice 4 : Effectuer la réduction à la Jordan des matrices suivantes. En déduire le polynôme minimal.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 : Même question avec les matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & -1 \\ 7 & -8 & -4 & 2 \\ 5 & -7 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & -10 & -3 & 16 \\ 3 & -5 & -2 & 9 \\ -2 & 6 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 9 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

a) Discuter les possibles formes normales de Jordan dans $M_3(\mathbb{C})$.

b) Déterminer les classes de similitude (la bonne terminologie, parlant d'orbites et de conjugaison, n'est pas au programme) des matrices nilpotentes 3×3, puis 4×4.

Exercice 7 :

a) Soit A une matrice à coefficients réels de polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-2)^2(X-3)^3$ et de polynôme minimal $\mu_A(X) = (X-2)(X-3)^2$. Quelles sont les formes possibles d'une réduite de Jordan de A ?

b) Même question avec une matrice B vérifiant $\chi_B(X) = (X-1)^3(X+1)^5$ et $\mu_B(X) = (X-1)^2(X+1)^3$.

2 Plus théorique

2.1 Simultanéité

Exercice 8 : Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-esapce vectoriel de dimension n, et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ un endomorphisme *ayant dans* $\mathbb{K}$ n *valeurs propres distinctes.*

a) Rappeler pourquoi f est diagonalisable ; décrire *toutes* les bases diagonalisant f.

b) Déterminer l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f.

c) Interpréter matriciellement.

Exercice 9 : Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et f, g deux endomorphismes. Montrer que si f et g commutent alors ils sont simultanément trigonalisables. La réciproque est-elle vraie ?

2.2 Nilpotence

Exercice 10 : Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ un endomorphisme. Montrer que f est nilpotent ssi pour chaque entier $k \geq 1$, $\mathrm{Tr}(f^k) = 0$.

2.3 Autour de Jordan

Exercice 11 : Deux matrices de même polynôme caractéristique sont-elles semblables ? Même question avec « polynôme minimal ».

Exercice 12 : Montrer qu'une matrice de Jordan est semblable à sa transposée. En déduire que toute matrice carrée complexe est semblable à sa transposée. Et pour une matrice carrée *réelle* ?