Feuille de TD No. 4

Décompositions de Dunford et Jordan

1 Pratique des décompositions

1.1 Décomposition de Dunford

Exercice 1 : Calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes ($a, b \neq 0$).

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 2 & b \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$. En effet la matrice donnée *est* diagonalisable.

c) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ & 0 & b \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

d) C'est la seule question de l'exercice où un léger calcul s'impose. La première chose à comprendre est que $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & b \\ & & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas ; l'écriture naïve n'est pas la décomposition de Dunford.

Le spectre est manifeste ; en outre $E_1(A) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}(ae_1 + e_2)$. Plus profondément, $E_{(1)}(A) = \ker(A - I_3)^2 = \mathrm{Vect}(e_1, be_2 - e_3)$.

L'opérateur diagonalisable qui « corrige » A est d valant Id sur $E_{(1)}(A)$ et $2\,\mathrm{Id}$ sur $E_2(A) = E_{(2)}(A)$. Ainsi $de_1 = e_1$; en outre $de_2 = d(ae_1 + e_2 - ae_1) = 2(ae_1 + e_2) - ae_1 = 2e_2 + ae_1$; enfin $de_3 = d(e_3 - be_2 + be_2) = e_3 - be_2 + 2be_2 + abe_1$.

Cette partie diagonalisable est donc, matriciellement, $\begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ & 2 & b \\ & & 1 \end{pmatrix}$, et la décomposition de Dunford est $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 2 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ & 2 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ab \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Je vais traiter à nouveau la question, pour forcer la réflexion. On note que le défaut de diagonalisabilité de la matrice est lié au rang de $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ & 1 & b \\ & & 0 \end{pmatrix}$, qui vaut 2 ; si en place du 0 du coin nord-est on avait ab, le rang serait 1 (et la matrice de départ serait diagonalisable). Ainsi $\begin{pmatrix}1 & a & ab\\ & 2 & b\\ & & 1\end{pmatrix}$ est diagonalisable, et diffère de la matrice de départ par $\begin{pmatrix}0 & 0 & -ab\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}$, qui est nilpotente. En outre les deux commutent à vue (rappelons qu'il est indispensable de le vérifier si l'on tâtonne).

La conclusion de cet exercice est que connaître une forme triangulaire ne donne pas instantanément la décomposition de Dunford.

Exercice 2 : Même question avec les matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 2.

a) Soit $A = \begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$; il n'y a rien d'évident, si bien que pour comprendre la géométrie de l'opérateur associé, on introduit le polynôme caractéristique. Un rapide calcul donne $\chi_A(X) = (X-3)^3$ (au facteur -1 près, comme toujours). Le théorème de Cayley-Hamilton affirme alors la nilpotence de $A - 3I_3$. Le cas est remarquablement simple : en effet $A = 3I_3 + (A - 3I_3)$; chaque terme est polynôme en A, le premier est diagonal, et le second nilpotent. C'est donc la décomposition de Dunford.

b) Soit $B = \begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Par flemme plus que par méthode, en tout cas certainement pas par réflexe, on détermine ses propriétés géométriques au moyen d'un artifice algébrique, le polynôme caractéristique, qui vaut ici encore $(X-3)^3$. Même conclusion.

c) Que croyez-vous qu'il arrive ?

d) Soit D la matrice concernée. De vue, le polynôme caractéristique est $(X+3)^4$. Pourquoi ? D est triangulaire par blocs, donc il suffit de se concentrer sur les blocs diagonaux ; chacun est de trace -6 et déterminant 9.

Donc $D + 3I_4$ est nilpotente, ce qui donne la décomposition de Dunford $D = -3I_4 + (D + 3I_4)$.

Remarque. N'oubliez jamais que le polynôme caractéristique est un *outil* en vue de réduire les endomorphismes, pas une fin en soi. À vrai dire même le spectre est une information optionnelle pour effectuer la décomposition de Dunford.

La rédaction en tiendra compte avec profit.

Exercice 3 : Même question avec les matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ & 1 & b\\ & & 2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & -1\\ -3 & 3 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 3.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ & 1 & b \\ & & 2 \end{pmatrix}$. On connaît le spectre ; 2 ne saurait poser problème. Pour 1, on regarde évidemment $A - I_3 = \begin{pmatrix} & a & 0 \\ & & b \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Son rang est 2 ; cela indique un problème de diagonalisabilité. On voit pourtant que $e_1 \in \ker(A - I_3)$, et que $e_2 \in \ker(A - I_3)^2$. Conclusion : (e_1, e_2) engendre $E_{(1)}(A)$. Comme $abe_1 + be_2 + e_3$ engendre $E_2(A)$, on a compris la géométrie caractéristique, et après un calcul d'inverse la part diagonalisable est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La part nilpotente est le reste $A - D = \begin{pmatrix} 0 & a & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; nous avons trouvé la décomposition de Dunford.

Vérification ? Il est manifeste que D est diagonalisable et que N est nilpotente ; manifeste également que leur somme est A. Mais la commutation ? C'est toujours chronophage. Le concepteur a donc tendance à relire rapidement ce qu'il a fait : si D a été construite en collant l'homothétie naturelle sur chaque espace caractéristique, la démonstration du cours montre que c'est le premier terme de la décomposition de Dunford ; si *pour cette construction de* D il arrive à $N = A - D$ nilpotente, il estimera que la probabilité d'une erreur est raisonnablement basse, et que selon toute raison, D et N commuteront.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On veut déterminer son spectre ? Clairement -1 est valeur propre, car $B + I_3$ est manifestement non-inversible. Pour déterminer les autres je procède comme suit. Le déterminant, à vue, est 2 ; la trace, à vue, est 0. Les deux autres valeurs propres vérifient donc $\lambda + \mu - 1 = 0$ et $-\lambda\mu = 2$; 2 et -1 conviennent.

Donc 2 est de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2. Enfin, le rang de $B + I_3$ est 1, donc la matrice est diagonalisable : c'est sa propre décomposition de Dunford.

c) Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour déterminer sa décomposition de Dunford nous appliquons la méthode passant par la détermination du spectre.

Spectre. À cette fin nous introduisons et factorisons le polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}
\chi_C(X) &= \begin{vmatrix} -X & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3-X & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2-X & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= -1 \cdot \begin{vmatrix} -X & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 2-X & -2 \end{vmatrix} + (1-X) \cdot \begin{vmatrix} -X & 2 & 0 \\ -3 & 3-X & 1 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= X(-2+3(2-X)) + (-6+3X+2) \\
&\quad + (1-X) \cdot [-X((3-X)(2-X)-1) - 2(-3(2-X)+2)] \\
&= X(-3X+4) + (3X-4) + (1-X)\left(-X(X^2-5X+5) - 2(3X-4)\right) \\
&= (1-X)(3X-4) + (1-X)(-X^3+5X^2-5X-6X+8) \\
&= (1-X)(-X^3+5X^2-8X+4) \\
&= (X-1)^2(X^2-4X+4) \\
&= (X-1)^2(X-2)^2
\end{aligned}$$

Le spectre est donc formé de 1 (multiplicité algébrique 2) et 2 (idem). Suivant la stratégie vue en cours, passons aux espaces propres et caractéristiques. (On rappellera régulièrement que *la connaissance du spectre n'est en fait pas nécessaire pour déterminer la décomposition de Dunford.*)

Géométrie de l'opérateur. Posons $C_1 = C - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le rang n'est évidemment pas 4 (ce que nous savions, mais le voir nous conforte) ; par ailleurs le mineur chocolatine est clairement non-nul, donc $\operatorname{rg} C_1 = 3$. En particulier la multiplicité géométrique de 1 est 1 : nous avons une obstruction à la diagonalisabilité, si bien que la décomposition de Dunford ne sera pas triviale. On sait déjà, sans les avoir calculés, que $E_1(C) = \ker C_1 < E_{(1)}(C)$.

Notons de même $C_2 = C - 2I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (Un rapide développement en C_3 nous assure que le rang n'est pas 4 — petite hygiène mentale qui garantit de n'avoir pas fait d'erreur en recopiant les coefficients.) Ici encore le mineur chocolatine indique que la multiplicité géométrique de 2 est 1 ; ici encore $E_2(C) < E_{(2)}(C)$.

Ainsi $E_{(1)}(C)$ et $E_{(2)}(C)$ sont chacun de dimension > 1. Mais ils sont en somme directe, donc chacun contraint la dimension de l'autre : ce sont deux plans, que nous n'avons pas calculés.

Espaces caractéristiques. Au lecteur naïf soucieux des espaces propres, la situation paraît néfaste. Or pour établir la décomposition de Dunford il suffit de connaître les espaces *caractéristiques*. A priori ceux-ci sont donnés par des équations. Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $0 = (C - I_4)^2 \cdot (C - 2I_4)^2 = C_1^2 C_2^2$, si bien que $\operatorname{im} C_2^2 \leq \ker C_1^2 = E_{(1)}(C)$. De même $\operatorname{im} C_1^2 \leq E_{(2)}(C)$.

Or ici $\operatorname{rg} C_1^2 = 2$, sans même encore calculer ce carré. Pourquoi ? D'une part $\operatorname{rg} C_1^2 \leq \dim E_{(2)}(C) = 2$; d'autre part $\operatorname{rg} C_1^2 \geq \operatorname{rg} C_1 - \dim \ker C_1 = 2$ en raisonnant géométriquement. En effet $f : \operatorname{im} f \to \operatorname{im} f^2$ a pour noyau $\ker f \cap \operatorname{im} f \leq \ker f$ de dimension ≤ 1, donc $\dim \operatorname{im} f^2 \geq \dim \operatorname{im} f - \dim \ker f$ — comme quoi l'abstraction, ça sert. En conclusion, $\ker E_{(2)}(C) = \operatorname{im} C_1^2$. De même, puisque $\operatorname{rg} C_2 = 3$, on a $\ker C_{(1)}(C) = \operatorname{im} C_2^2$. Il suffit donc, pour connaître les espaces caractéristiques, de déterminer des images — sans résoudre d'équations.

S'adonnant au calcul on trouve $C_1^2 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & -5 \\ -5 & 2 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C_2^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
On saurait aisément extraire des familles génératrices et les concaténer pour obtenir une matrice de passage pertinente. Mais comme il faudra inverser celle-ci, notre intérêt évident est de la simplifier autant que possible en faisant quelques opérations mentales sur les colonnes.
Clairement $\operatorname{im} C_2^2 = \operatorname{Vect}(f_{1,1}, f_{1,2})$ et $\operatorname{im} C_1^2 = \operatorname{Vect}(f_{2,1}, f_{2,2})$, pour par exemple les vecteurs $f_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $f_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Strette. Soit P codant les $f_{i,k}$, i.e. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ par les algorithmes ordinaires. Alors la matrice $D = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ envoie chaque $f_{i,k}$ sur $\lambda_i f_{i,k}$: c'est l'opérateur diagonalisable sous-jacent à C, qui est homothétique sur chaque espace caractéristique. De sorte que posant $N = C - D = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, on a la décomposition de Dunford $C = D + N$.

Le désarroi. Le lecteur est désemparé. Comment vérifier la crédibilité de pareil résultat ? Par la méthode. On a effectivement obtenu les espaces caractéristiques (c'était d'ailleurs la partie facile) ; D est bien l'opérateur pertinent qui « corrige » le défaut de diagonalisabilité de C ; le terme d'erreur N est nilpotent par la démonstration établissant la décomposition. Mais comment s'assurer qu'on ne s'est pas trompé dans une étape du calcul ? En pratique on ne vérifie pas la commutativité de D et N (trop chronophage) ; on s'assure simplement que N est *vraisemblablement* nilpotente. Si c'est crédible, on estime avoir bon.
On pourrait calculer N^2 mais 1. c'est déjà chronophage (même géométriquement, i.e. en vérifiant que $\operatorname{im} N \leq \ker N$) et 2. en taille plus grande, il faudrait a priori calculer des puissances plus hautes. Pour son hygiène intellectuelle, le correcteur a procédé comme suit : la trace de N est nulle (le correcteur s'était d'ailleurs trompé dans son calcul de tête, et vérifier la trace l'en avisa). On voit aussi que $\operatorname{rg} N < 4$. Or $\det = \operatorname{Tr} = 0$ sont des conditions nécessaires (non suffisantes) pour être nilpotent. C'est une légère indication de la fiabilité des calculs ci-dessus.

d) Soit $D = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Suivant la même feuille de route, le lecteur trouvera :

$$\chi_D(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1 = (X-1)(X^3 - X^2 - X + 1) = (X-1)^2(X^2-1) = (X-1)^3(X+1).$$

La valeur propre -1 est de multiplicité algébrique 1 ; soit $D_{-1} = (D + I_4) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Comme la multiplicité algébrique de -1 est 1, c'est aussi sa multiplicité géométrique : $E_{-1}(D) = E_{(-1)}(D)$ est une droite. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, et en notation évidente

$0 = (D+I_4)(D-I_4)^3 = D_{-1}D_1^3 = D_1^3 D_{-1}$. Ainsi $\operatorname{im} D_{-1} \leq \ker D_1^3 \leq E_{(1)}(D)$. Mais $\operatorname{im} D_{-1}$ est de dimension 3, donc on a simultanément $\ker D_{-1} = E_{-1}(D) = E_{(-1)}(D)$, et $\operatorname{im} D_{-1} = E_{(1)}(D)$.

Ici, $f_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est quand même vecteur évident de $\ker D_{-1}$. En outre les colonnes C_1, C_2, C_4 forment une base de $\operatorname{im} D_{-1}$; cette base ne faisant pas rêver (il faudra quand même calculer une matrice inverse), remplaçons-la par une meilleure :

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}]{} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow -\frac{1}{4} C_3]{} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[C_2 \leftarrow \frac{1}{2} C_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base plus agréable de $\operatorname{im} D_{-1}$ est donc formée des colonnes ci-dessus.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage pertinente, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Nous avons tout fait pour que $D' = P \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit la partie diagonalisable ; posons $N = D - D' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Le correcteur, vu l'heure tardive, a vérifié la commutation en ligne (noter que WolframAlpha est parfois très agaçant).

Scholie finale. Ces méthodes passant par le spectre sont bien sûr un pieux mensonge : chaque méthode doit se voir assigner un « coût » calculatoire, l'impossibilité se voyant attribuer le coût infini. Ici, la résolution d'un polynôme arbitraire de degré n est de coût infini ; finasser sur le reste, c'est se tromper de critique.

En fait pour trouver la décomposition de Dunford, *on n'a pas besoin de trigonaliser* car *on n'a même pas besoin de connaître le spectre* ; ajoutons que la détermination du spectre est une utopie, alors qu'il existe des algorithmes déterministes pour calculer exactement la décomposition de Dunford.

La conclusion de tout cela est que la pédagogie force parfois à quelques contorsions : pour illustrer à toute force les techniques liées au spectre, le cours a décrit un algorithme surtout théorique, inadapté au calcul de Chevalley-Dunford.

1.2 Réduction de Jordan

Exercice 4 : Effectuer la réduction à la Jordan des matrices suivantes. En déduire le polynôme minimal.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 4.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique (je calcule à vue trace et déterminant) est $X^2+2X+1 = (X+1)^2$; comme la matrice n'est pas diagonale, on a déjà le polynôme minimal : $(X+1)^2$ encore.

Puisque cela est scindé et que la décomposition de Jordan a les mêmes hypothèses que la trigonalisation, elle est effectuable dans $\mathbb{R}$. Comme la valeur propre -1 est de multiplicité algébrique 2 mais que A n'est pas une homothétie, la multiplicité géométrique est 1.

Il n'y a que peu de formes de Jordan possibles a priori en dimension 2, le lecteur en conviendra. On prédit ainsi une réduite de Jordan de forme $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Reste à calculer une matrice de changement de base, plus géométriquement une base de Jordan.

Déterminons d'abord $V_{-1}(A) = \ker(A + I_2) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vu le peu de dimensions en jeu, toute base (v_1, w_2) est trigonalisante. On prend alors $w_2 \notin \mathrm{Vect}(v_1)$ arbitraire, et l'on calcule λ tel que $A \cdot w_2 = -w_2 + \lambda v_1$. Puis on pose $v_2 = \frac{1}{\lambda} w_2$, obtenant $A \cdot v_2 = \frac{1}{\lambda}(-w_2 + \lambda v_1) = -w_2 + v_1 = -v_2 + v_1$, de sorte que (v_1, v_2) est une base de Jordan. Disons $w_2 = e_1$, menant à $Aw_2 = e_1 - 2e_2 = 2v_1 - w_2$. Ici $\lambda = 2$ et l'on posera donc $v_2 = \frac{1}{2}e_1$. Une base de Jordan est $(e_1 - e_2, \frac{1}{2}e_2)$, et elle amène A sur sa forme normalisée ; en équations, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Autre approche. Compléter en une base de Jordan est trouver un v_2 tel que $Av_2 = -v_2 + v_1$; en matrices, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dont une solution évidente est $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique (je développe selon la première colonne) est :

$$\begin{aligned} \chi_B &= (1-X) \cdot [-X(1-X) - 1] + 1 \cdot (1-X) \\ &= (1-X) \cdot (X^2 - X) \\ &= -X(X-1)^2. \end{aligned}$$

Il suit que 0 est valeur propre de multiplicité algébrique 1, et 1 est valeur propre de multiplicité algébrique 2 ; notamment B est trigonalisable et possède une réduite de Jordan sur $\mathbb{R}$. Vu la décomposition directe en espaces caractéristiques, il n'y a essentiellement que deux formes possibles pour la réduite : $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (diagonalisable) ou $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (non diagonalisable).

Rappelons que le polynôme caractéristique ne permet *pas* de les distinguer.

D'abord $V_0(B) = \ker B = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(v_1)$, avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cela ne jouera guère de rôle dans la suite.

À présent $V_1(B) = \ker(B - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(v_2)$, avec $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Notamment B n'est pas diagonalisable, ce qui nous enseigne son polynôme minimal : égal au polynôme caractéristique, et sa réduite de Jordan : $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

La méthode en dimension 2 n'est pas littéralement valable ici. Mais on peut procéder de même en travaillant dans $V_{(1)}(B)$. En effet déterminer le bloc (unique) de Jordan de B associé à la valeur propre 1, c'est effectuer la réduction de B en restriction à $V_{(1)}(B)$. On détermine ainsi $V_{(1)}(B) = \ker(B - I_3)^2 = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{vect}(v_2, w_3)$ avec $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On écrit alors $B \cdot w_3 = w_3 + \lambda v_2$, et l'on ajuste comme précédemment. Ici $B \cdot w_3 = e_1 + e_2 - 2e_3 = w_3 + v_2$ donc $\lambda = 1$; le vecteur w_3 complète en base de Jordan.

En conclusion, $B = PJP^{-1}$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme précédemment, on peut aussi déterminer v_3 tel que $(B - I_3)v_3 = v_2$, i.e. résoudre $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, dont une solution évidente est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Soit $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En vue d'étudier son spectre, déterminons son polynôme caractéristique, en développant selon la troisième ligne :

$$\begin{aligned} \chi_C(X) &= 1 \cdot [1 + (1 - X)] + (1 - X) \cdot [(4 - X)(1 - X) + 2] \\ &= 2 - X + (1 - X)(X^2 - 5X + 6) \\ &= -X^3 + 6X^2 - 12X + 8 \\ &= (2 - X)(X^2 + 4X + 4) \\ &= -(X - 2)^3 \end{aligned}$$

Je vais être honnête. Au début j'ai raté la factorisation par $X - 2$; comme le polynôme développé $-X^3 + 6X^2 - 12X + 8$ avait une sale tête, j'ai estimé trace et déterminant pour m'assurer de la cohérence du résultat. Comme ça collait, et que tout ceci n'est de toute façon qu'un exercice, je me suis dit a. que mon calcul était bon et b. qu'il y aurait une solution évidente : et 2 marchait.

En conclusion 2 est valeur propre de multiplicité algébrique 3 ; on pourra mener à bien la décomposition de Jordan sur $\mathbb{R}$. Clairement C n'est pas diagonalisable, et comme la dimension ambiante est 3 il n'y a plus que deux formes a priori pour sa réduite : $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (2 blocs de Jordan) ou $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (un seul bloc de Jordan). Elles sont distinguées par un invariant simple : la dimension de l'espace propre.

Or $V_2(C) = \ker(C - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $\dim V_2(C) = 1$, il y a un unique bloc de Jordan, ce qui permet d'affirmer que C est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$, et que son polynôme minimal est $(X+2)^3$.

Alors $(C - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de noyau $\mathrm{Vect}(v_1, w_2)$ avec $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un vecteur qui y échappe est $f_3 = e_1$. Itérons pour construire une base : $Cf_3 = f_3 + f_2$, avec $f_2 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$. Puis $Cf_2 = 5e_1 - 5e_2 + 3e_3 = 2f_2 + f_1$, avec $f_1 = e_1 - e_2 + e_3$. La base (f_1, f_2, f_3) est de Jordan.

Il suit que $C = PJP^{-1}$ avec $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Autre approche. Déterminer v_2 tel que $(C - 2I_3) \cdot v_2 = v_1$; sans peine $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient. Puis chercher v_3 tel que $(C - 2I_3) \cdot v_3 = v_2$; sans peine $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Noter qu'on trouve une autre matrice de passage : pas d'unicité des bases de Jordan.

d) Soit $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminons son spectre via le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_D(X) &= X^2(3 - X) + 2 + 2 + X - 3 - 2X - 2X \\ &= -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 \\ &= (1 - X)^3 \end{aligned}$$

La valeur propre 1 est de multiplicité algébrique 3 ; la trigonalisabilité réelle est garantie, ainsi que la conjugaison réelle à une réduite de Jordan. Vu l'absence de diagonalisabilité ($D \neq I_3$), il y a deux possibilités a priori pour cette réduite.

À mon sens c'est une erreur de méthode que de travailler avec D ; je commence toujours par une décomposition de Dunford, en posant ici $D' = D - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Clairement $\mathrm{rg}\, D' = 1$, donc $\dim \ker D' = 2$. Il y a ainsi deux blocs de Jordan, ce qui permet d'affirmer que D' est semblable à $J_{D'} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$. Et bien sûr $D = D' + I_3$ est semblable à $J_D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

(Noter qu'on n'a dès lors plus besoin de calculer pour savoir que $D'^2 = 0$; d'ailleurs le polynôme minimal de D est $(X-1)^2$.)

On prend $v_1 \notin \ker D'$, par exemple $v_1 = e_1$. Alors $v_2 = D'v_1 = 2e_1 - e_2 + e_3$; pour compléter on prend $v_3 \in \ker D' \setminus \mathrm{Vect}(v_2)$, par exemple $v_3 = e_1 + e_3$. On voit alors que $D'v_3 = 0$, $D'v_2 = 0$, et $D'v_1 = v_2$. Cela signifie que la base (v_3, v_2, v_1) est de Jordan, ou encore : $D' = PJ_{D'}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $D = PJ_DP^{-1}$ dans la même notation.

Remarque. Avec cette approche il paraît plus naturel de prendre des réduites de Jordan *inférieures*, pour ne pas avoir à renverser les bases.

e) Soit $E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer le spectre de E, calculons son polynôme caractéristique ; la matrice est triangulaire par blocs :

$$\begin{aligned}\chi_E(X) &= [(-2-X)(-4-X)+1]\cdot[(-5-X)(-1-X)+4]\\ &= (X^2+6X+9)^2\\ &= (X+3)^4\end{aligned}$$

Le suspense est total. Comme j'en ai assez de procéder bêtement, je pose $E' = E + 3I_4 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Et au lieu de réduire E je réduis la nilpotente E'.

Manifestement $\operatorname{rg} E' = 2$: donc $\dim\ker E' = 4-2 = 2$. Il y a exactement deux blocs de Jordan, soit de dimension 1 et 3, soit de dimension 2 et 2. Pour lever le mystère on calcule $E'^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \neq 0$. On en déduit que E' n'est *pas* de réduite $\begin{pmatrix}J_2 & \\ & J_2\end{pmatrix}$ avec $J_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ & 0\end{pmatrix}$ (elle serait de carré nul) ; l'autre forme prévaut donc qui est $J_{E'} = \begin{pmatrix}0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$; et le polynôme minimal de E' est X^3, ce qui donne celui de E. Il nous reste à conjuguer.

Manifestement $v_1 = e_4 \notin \ker E'^2$. Son image est $v_2 = E'e_4 = 2e_1 + 2e_2 + 4e_3 + 2e_4$; posons $v_3 = E'^2 v_1 = 8e_1 + 8e_2$. Alors (v_3, v_2, v_1) forme une agréable base, que l'on complète en une base de Jordan en prenant $v_4 \in \ker(E') \setminus \operatorname{Vect}(v_3)$, par exemple $v_4 = 4e_2 + 2e_3 + e_4$.

On a ainsi : $E'v_4 = 0$, $E'v_1 = v_2, E'v_2 = v_3$, et $v_4 \notin \operatorname{Vect}(v_3)$.

Il suit que E' est semblable à $J_{E'} = \begin{pmatrix}0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$ et E à $J_E = \begin{pmatrix}-3 & & & \\ & -3 & 1 & \\ & & -3 & 1\\ & & & -3\end{pmatrix}$ dans la base (v_4, v_3, v_2, v_1) de changement de base codé par $P = \begin{pmatrix}0 & 8 & 2 & 0\\ 4 & 8 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Post scriptum.

— La planète ne remercie pas l'école du XVII^e siècle d'avoir consacré la notation $f(x)$, où l'opérateur est à gauche. Cela pousse à travailler avec des vecteurs colonnes, dont le lecteur aura noté qu'ils consomment plus de papier que les vecteurs lignes, si le reste de l'écriture est en lignes. Noter $x.f$ est possible, conforme sans doute à certaines opérations mentales, et bien plus éco-responsable.

— Tout ce qui précède relève bien sûr du mensonge éhonté. *On ne peut pas résoudre algébriquement les polynômes arbitraires de degré* ≥ 5 (Ruffini-Abel-Galois), si bien qu'introduire le polynôme caractéristique pour déterminer le spectre d'une matrice 100×100 arbitraire relève de la fantaisie pure, ou de la convention pédagogique, tant il est vrai que tout enseignement n'est que fantasme. En pratique, pour obtenir des *estimations numériques* de racines de polynômes, on fait plutôt des itérations de matrices : c'est-à-dire que l'algèbre approchée emploie l'algèbre linéaire, alors que l'algèbre linéaire ne saurait s'appuyer sur une inexistante algèbre exacte.

Exercice 5 : Même question avec les matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -3 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & -1 \\ 7 & -8 & -4 & 2 \\ 5 & -7 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & -10 & -3 & 16 \\ 3 & -5 & -2 & 9 \\ -2 & 6 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 9 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 5. Je ne rédige pas la correction et donne seulement une réduction possible.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$; $\mu = (X+1)^2$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$; $\mu = (X-2)^3$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 3 & -1 \\ 7 & -8 & -4 & 2 \\ 5 & -7 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$; $\mu = (X-1)^2$.

d) $\begin{pmatrix} 5 & -10 & -3 & 16 \\ 3 & -5 & -2 & 9 \\ -2 & 6 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$; $\mu = (X-1)X^3$.

e) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 9 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$; $\mu = X^3$.

Exercice 6 :

a) Discuter les possibles formes normales de Jordan dans $M_3(\mathbb{C})$.

b) Déterminer les classes de similitude (la bonne terminologie, parlant d'orbites et de conjugaison, n'est pas au programme) des matrices nilpotentes 3×3, puis 4×4.

Solution de l'exercice 6.

a) Soient $A \in M_3(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ses valeurs propres avec éventuelle répétition.

— Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont distinctes, la matrice est diagonalisable. Une forme normale de Jordan est la mêeme chose qu'une forme diagonale, ici composée de trois blocs de taille 1 :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

— Si λ_1 est simple et $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, nous distinguons deux cas.

— Si $\dim \ker(A - \lambda I_3) = 2$, la matrice est diagonalisable. Une forme normale de Jordan est la même chose qu'une forme diagonale, ici composée de trois blocs de taille 1 :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

— Si en revanche $\dim\ker(A-\lambda I_3)=1$, la matrice n'est pas diagonalisable. Sa forme de Jordan est constituée d'un bloc de Jordan de taille 1 (valeur propre λ_1) et d'un bloc de Jordan de taille 2 (valeur propre λ) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda & 1 \\ & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

— Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, nous distinguons trois cas.

— Si $\dim\ker(A-\lambda I_3)=3$, la matrice est diagonalisable. Une forme normale de Jordan est la même chose qu'une forme diagonale, ici composée de trois blocs de taille 1 :

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

— Si $\dim\ker(A-\lambda I_3)=2$, la matrice n'est pas diagonalisable. Une forme normale de Jordan est constituée de deux blocs de Jordan. Nécessairement l'un est de taille 1 et l'autre de taille 2 :

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & 1 \\ & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

— Si $\dim\ker(A-\lambda I_3)=1$, la matrice n'est pas diagonalisable. La forme normale de Jordan est constituée d'un seul bloc, nécessairement de taille 3 :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

b) Une matrice nilpotente, ayant toutes ses valeurs propres (0) dans le corps de base, possède une forme de Jordan sur ce corps. Or deux matrices sont semblables si et seulement si elles possèdent une forme de Jordan commune. Nous en sommes donc à énumérer les réduites de Jordan possible. Il y a entre 1 et n blocs, où n est la dimension.

Dimension 3 : on peut avoir un unique bloc, pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, deux blocs, pour $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$, ou trois blocs, pour la matrice nulle. Nous venons de donner des représentants des classes de similitude des endomorphismes nilpotents en dimension 3.

Dimension 4 : il y a deux façons d'avoir deux blocs ; la liste résultante est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 :

a) Soit A une matrice à coefficients réels de polynôme caractéristique $\chi_A(X)=(X-2)^2(X-3)^3$ et de polynôme minimal $\mu_A(X)=(X-2)(X-3)^2$. Quelles sont les formes possibles d'une réduite de Jordan de A ?

b) Même question avec une matrice B vérifiant $\chi_B(X)=(X-1)^3(X+1)^5$ et $\mu_B(X)=(X-1)^2(X+1)^3$.

Solution de l'exercice 7.

a) La taille de la matrice est le degré du polynôme caractéristique, i.e. 5. On connaît les valeurs propres avec multiplicité algébrique. En outre la multiplicité *dans le polynôme minimal* est la plus grande taille d'un bloc de Jordan. Ces choses-là se comprennent en restriction : on travaille espace caractéristique par espace caractéristique ; il est clair que 2 ne fait pas obstacle à la diagonalisation, i.e. que $V_{(2)}(A) = V_2(A)$, mais que 3 oui. La seule façon d'avoir un bloc de Jordan de taille 2 dans un espace de dimension 3, est d'avoir un autre bloc de taille 1.

Conclusion : A est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$.

b) Nous sommes en dimension 8. Dans l'espace $V_{(1)}(B)$, de dimension 3, nous parlons d'un endomorphisme de la forme $\mathrm{Id} + n$ où n est de polynôme minimal $n^2 = 0$. Cela lui confère un bloc de Jordan de taille 2 ; l'autre est nécessairement de taille 1. Donc n est de type $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

En restriction à l'espace $V_{(-1)}(B)$, de dimension 5, l'endomorphisme est de forme $\mathrm{Id} + n'$, avec n' de polynôme minimal $n'^3 = 0$. Il reste de la place pour un bloc de Jordan de taille 2 ou deux de taille 1, ce qui signifie que n' est de type $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$.

Donc B est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$.

Ce genre d'exercices n'apporte pas grand' chose ; en général on ne pourra rien dire d'essentiellement non trivial.

2 Plus théorique

2.1 Simultanéité

Exercice 8 : Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-esapce vectoriel de dimension n, et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ un endomorphisme *ayant dans* $\mathbb{K}$ n *valeurs propres distinctes.*

a) Rappeler pourquoi f est diagonalisable ; décrire *toutes* les bases diagonalisant f.

b) Déterminer l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f.

c) Interpréter matriciellement.

Solution de l'exercice 8.

a) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ les valeurs propres distinctes ; $E_i = V_{\lambda_i}(f)$ les espaces propres, qui sont en somme directe. Par définition pour chaque i on a $\dim E_i \geq 1$. Alors $\dim V = n \geq \dim \bigoplus_{i=1}^n E_i \geq n$, d'où l'égalité $\bigoplus_{i=1}^n E_i = V$, qui signifie la diagonalisabilité.

   Fixons maintenant pour chaque i un vecteur propre $v_i \in E_i \setminus \{0\}$. Nous obtenons ainsi une base diagonalisante $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. En fait toute telle base est de cette forme, à permutation et scalaire<u>s</u> près. Soit en effet $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ une autre base de diagonalisation. Alors w_1 est un vecteur propre, donc il existe i tel que $w_1 \in E_i$; comme $\dim E_i = 1$ d'après ce qui précède, il existe $a_1 \in \mathbb{K}$ tel que $w_1 = a_1 v_i$, et a_1 n'est pas nul car $w_1 \neq 0$. En conclusion, toute base de diagonalisation est de la forme $(a_1 v_{\sigma(1)}, \ldots, a_n v_{\sigma(n)})$ pour $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{K}^*)^n$ et $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ (le groupe symétrique sur $\{1, \ldots, n\}$).

b) Soit maintenant g commutant avec f. Comme g laisse chaque E_i invariant et que $\dim E_i = 1$, g induit un endomorphisme de chaque droite vectorielle E_i ; il suit que $g_{|E_i}$ est une homothétie, un opérateur $\mu_i \mathrm{Id}_{E_i}$ (attention, μ_i dépend de i).

   On retrouve notamment que g est diagonalisable en même temps que f (théorème pour lequel il n'est pas nécessaire que le spectre de f soit simple ; bien sûr on suppose f et g diagonalisables).

c) Interprétation matricielle : toute matrice de passage entre deux bases de trigonalisation est produit d'une matrice diagonale et d'une matrice de permutation.

   Puis : le centralisateur de $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est exactement l'ensemble des matrices diagonales.

Exercice 9 : Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et f, g deux endomorphismes. Montrer que si f et g commutent alors ils sont simultanément trigonalisables. La réciproque est-elle vraie ?

Solution de l'exercice 9. C'est une récurrence ; l'affirmation est triviale en dimension 1. Puis on prend une valeur propre, disons λ, de f. Par commutation, $V_\lambda(f)$ est stable sous g ; la restriction $\breve{g} = g_{|V_\lambda(f)}$ est alors bien définie. Ce dernier endomorphisme (de $V_{\lambda(f)}$) possède une valeur propre, disons μ, et un vecteur propre $v \in V_{\lambda(f)} \setminus \{0\}$. Ainsi v est λ-propre pour f et μ-propre pour g.

On prend alors un supplémentaire quelconque H de $L = \mathbb{C}v$; comme dans le théorème de trigonalisation on forme les projecteurs sur H parallèlement à L, et les opérateurs pertinents $f', g' \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H)$. On conclut par récurrence.

La réciproque est fausse : prenons deux matrices triangulaires supérieures (donc simultanément trigonalisables) par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}$. Leur produit dépend de l'ordre. Interprétant en termes d'endomorphismes, on a deux trigonalisables qui ne commutent pas.

2.2 Nilpotence

Exercice 10 : Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ un endomorphisme.

Montrer que f est nilpotent ssi pour chaque entier $k \geq 1$, $\mathrm{Tr}(f^k) = 0$.

Solution de l'exercice 10. La question est formulée de manière géométrique, intrinsèque, et non en termes de matrices. C'est pourtant équivalent. Soient en effet $\mathcal{B}$ une base de V quelconque et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$; alors f est nilpotent ssi M l'est, et $\mathrm{Tr}(f^k) = \mathrm{Tr}(M^k)$.

Il suffit donc de prendre une matrice carrée M et de montrer qu'elle est nilpotente si et seulement si toutes ses puissances non-nulles sont de trace nulle. Un sens est clair. En effet si M est nilpotente, alors sa seule valeur propre est 0 ; trigonalisant, M est triangulaire supérieure stricte (des 0 sur la diagonale), et M^k a la même structure, donc $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$. Montrons la réciproque.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de M. Alors $\mathrm{Tr}(M^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$, et cette expression est nulle pour tout $k \geq 1$. On a le sentiment que cela doit forcer tous les λ_i à être nuls ; c'est même exactement ce qu'on veut montrer.

Le problème est qu'on voit mal comment procéder. On ne saurait faire de l'analyse avec $\mathrm{Tr}(M^k)$ comme fonction en k, qui reste entier. Introduire plusieurs valeurs de k (on a d'ailleurs la lancinante impression que les n premières devraient suffire) pour former un système polynomial $P_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \cdots = P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$? C'est tentant mais les systèmes de polynômes sont, pour dire les choses brutalement, un sujet compliqué. Le mieux est d'exploiter nos connaissances d'algèbre linéaire. Parce que n équations, ça se met dans une matrice, et qu'une matrice avec des λ_i^j, ça nous rappelle un déterminant classique. En somme, on fait ce que fait tout être civilisé : convoquer sa culture, docile aux appels de la mémoire.

Soient (premier essai) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \\ \lambda_1^n & \ldots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Par hypothèse, $A \cdot X = 0$. Pourtant le déterminant de A se calcule avec la formule attribuée (erronément) à Vandermonde : en $\prod_i \lambda_i \cdot \prod_{i<j} \lambda_j - \lambda_i$. Malheur : on a compté les valeurs propres avec répétition, donc une annulation du second terme ne choque personne.

Soient (second essai, le bon) $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_d}$ les valeurs propres *sans répétition*, de multiplicité algébrique respective $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Soient $B = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & \ldots & \lambda_{i_d} \\ \lambda_{i_1}^2 & \ldots & \lambda_{i_d}^2 \\ \vdots & & \\ \lambda_{i_1}^d & \ldots & \lambda_{i_d}^d \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$. Par hypothèse, $B \cdot Y = 0$. Pourtant la formule erronément attribuée à Vandermonde entraîne que si les valeurs propres λ_{i_j} sont non-nulles, alors B est inversible, contradiction.

Conclusion : si pour tout $k \geq 1$, on a $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$, alors toutes les valeurs propres sont nulles. M est alors trigonalisable à diagonale nulle, donc semblable à une matrice nilpotente, et nilpotente elle-même.

Remarques.

— La trigonalisabilité se fait dans une clôture algébrique ; la nilpotence ne dépendant pas du corps de base, le raisonnement est valide. À vrai dire je vois dans l'algèbre linéaire la meilleure occasion d'introduire les *principes de transfert* (ici à l'échelle des inclusions structurelles).

— La solution est caractéristique de l'état d'esprit de l'auteur, qui refuse les arguments analytiques en algèbre. Cela donne une universalité supplémentaire au résultat, vrai sur bien d'autres corps que celui des réels ; sans l'être sur tous les corps toutefois.
À supposer que $\mathbb{K}$ soit de caractéristique p et tous les α_i divisibles par p, son raisonnement n'est plus correct puisque le vecteur Y est nul. Mais l'énoncé lui-même est incorrect : en caractéristique p et dimension $n = p$, on prendra l'identité. Ceci est violemment hors-programme.

2.3 Autour de Jordan

Exercice 11 : Deux matrices de même polynôme caractéristique sont-elles semblables ? Même question avec « polynôme minimal ».

Solution de l'exercice 11. La réponse est « non » dans les deux cas. D'abord, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle ont le même polynôme caractéristique ; mais seule la matrice nulle est semblable à la matrice nulle.

Pour le polynôme minimal, il faut monter en dimension. Considérons $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Leur réduite de Jordan étant distincte, elles ne sont pas semblables. Mais X^2 annule chacune, dont il est le polynôme minimal.

On réfléchira d'ailleurs au fait suivant : en dimension ≤ 3, deux matrices de même polynôme minimal sont effectivement semblables.

Exercice 12 : Montrer qu'une matrice de Jordan est semblable à sa transposée. En déduire que toute matrice carrée complexe est semblable à sa transposée. Et pour une matrice carrée *réelle* ?

Solution de l'exercice 12. Travaillant par blocs, on peut supposer qu'on dispose d'un unique bloc de Jordan J. Retranchant l'identité, on est ramenés à un bloc de Jordan nilpotent. Celui-ci code, dans une base $(v_1, \ldots, v_n)$, l'endomorphisme $f(v_k) = v_{k-1}$ (avec la convention $v_0 = 0$). Alors dans la base $(v_n, \ldots, v_1)$, ce même opérateur a pour matrice J^t, qui est donc semblable à J. Il suit que toute matrice de Jordan est semblable à sa transposée.

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée complexe. Soit J sa réduite de Jordan : il existe P inversible telle que $M = PJP^{-1}$. Notamment $M^t = P^{-t}J^tP^t$, de sorte que M^t et J^t sont semblables. Mais J^t et J le sont par ce qu'on a vu, et M et J par construction : il suit que M^t et M sont semblables.

Pour une matrice carrée réelle M, on commence par voir M comme une matrice complexe : M et M^t sont $\mathbb{C}$-semblables. On case alors un lemme à retenir.

Lemme. Deux matrices réelles $\mathbb{C}$-semblables sont $\mathbb{R}$-semblables.

Considérons en effet une conjugante $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ réalisant $A = PBP^{-1}$. Notons $P = Q + iR$ avec Q et R matrices réelles. On a $AP = PB$ d'où identifiant, $AQ = QB$ et $AR = RB$; hélas on ne peut affirmer l'inversibilité de Q ou de R.

Soit $f(t) = \det(Q + tR)$; c'est un poynôme en t à coefficients réels, et qui ne s'annule pas en $t = i$. Ce n'est donc pas le polnyôme nul ; il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) \neq 0$. On prend alors $P' = Q + t_0R$, matrice réelle inversible et vérifiant $AP' = P'B$, d'où la $\mathbb{R}$-similitude.