TD 3 : Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) pour quelles valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A + \lambda \cdot I_n \in GL_n(\mathbb{R})$?

2) m.q. il existe une suite de matrices $A_k \in \underline{GL_n(\mathbb{R})}$ t.q.

$$A_k \longrightarrow A, \quad k \to \infty$$

au sens suivant : $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$, la suite des coefficients (i,j) de A_k converge vers le coeff. (i,j) de A :

$$A_k(i,j) \xrightarrow[k \to \infty]{} A(i,j).$$

Manière de formuler la conclusion :

$GL_n(\mathbb{R})$ est <u>dense</u> dans $M_n(\mathbb{R})$.

Solution : 1) $A+\lambda\cdot I_n$ inversible

ssi $\ker(A+\lambda I_n)=\{0\}$

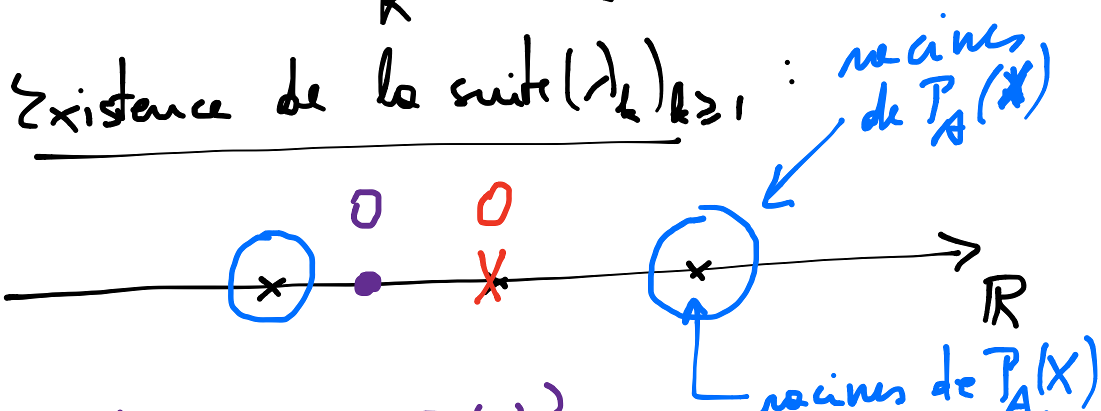
ssi $-\lambda$ n'est **pas** une valeur propre de A

ssi $-\lambda$ n'est **pas** racine du pol. car. $P_A(X)$

2) Il suffit de remarquer le fait que $\exists\, \lambda_k \longrightarrow 0$, $k\longrightarrow\infty$ t.q. $A+\lambda_k\cdot I_n$ inversible. On pose alors

$$A_k = A+\lambda_k I_n .$$

Existence de la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$:



(il y en a un nombre fini, au plus n)

Si $0\notin\{\text{racines de } P_A(X)\}$, on peut prendre $\lambda_k=0$.

Si $0\in\{\text{racines de } P_A(X)\}$, alors on choisit une suite $\lambda_k\longrightarrow 0$, $\lambda_k\neq 0$, avec $\lambda_k\in$ voisi. assez petit de 0. De cette manière on s'assure

que $-\lambda_k \notin \{$racines de $P_A(X)\}$ et donc
$A_k = A + \lambda_k I_n$ inversible.

Ce qui est sous-jacent à cet argument est l'énoncé suivant :

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{\text{ensemble fini}\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

<u>La suite de matrices inversibles</u>

$$\underline{A_k = A + \lambda_k I_n}, \quad \text{avec } \lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \lambda_k \neq 0$$

<u>convient</u> :

<u>$i \neq j$</u> : $A_k(i,j) = A(i,j) \xrightarrow{k\to\infty} A(i,j)$

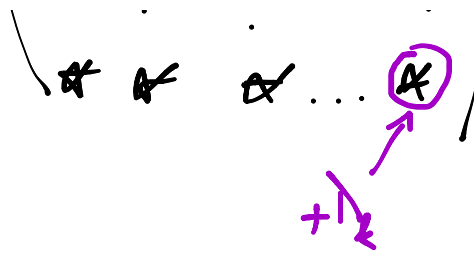
<u>$i = j$</u> : $A_k(i,i) = A(i,i) + \lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A(i,i)$

$\boxed{///}$

<u>Image</u> :

$+\lambda_k$ $\quad$ $+\lambda_k$

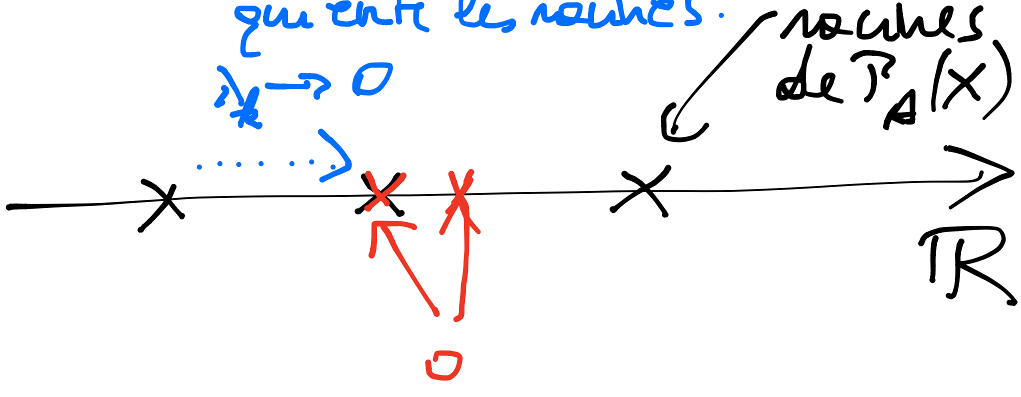
$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$



NOTES DE TD EN DIRECT

Si l'on veut trouver une suite $\lambda_k \to 0$ t.q. $A + \lambda_k I_n$ soit inversible, il suffit de remarquer qu'il est possible de le faire puisque le complémentaire d'un ensemble fini dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

qui évite les racines.



Une telle suite converge. Les coeff. de la matrice $A + \lambda_k I_n$ convergent vers les coeff. de A.

À retenir : ceci est un résultat d'approximation :

$$GL_n(\mathbb{R}) \underset{\text{ouvert dense}}{\subseteq} M_n(\mathbb{R})$$

"<u>Une matrice tirée au hasard sera inversible</u>".