TD 3 – Exo 6.

(i). $u \in \mathrm{End}_k(E)$, E k-esp. v.

t.q. $u^3 = Id$.

M.q. $E = \ker(u - Id)$

$\oplus \ker(u^2 + u + Id)$.

Solution :

$\Leftrightarrow u^3 - Id = 0$

L'hypothèse $u^3 = Id$

équivaut à ce que le

polynôme $P(X) = X^3 - 1$

annule u :

$$P(u) = 0.$$

Maintenant on peut raisonner en termes de polynômes :

$$\boxed{X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)}$$

premiers entre eux !

<u>Rmq</u> : ces polynômes sont premiers entre eux. Mais ce n'est pas pareil que dire qu'ils sont irréductibles :

· $X-1$ irréd. car de degré 1

· X^2+X+1 — irréd. sur $\mathbb{R}$

— réductible sur $\mathbb{C}$

$$\left(X-e^{2i\pi/3}\right)\left(X-e^{4i\pi/3}\right).$$

Mais le lemme des noyaux utilise une décomp. en facteurs premiers entre eux :

<u>Lemme des noyaux</u> :

$P = Q\cdot R$, Q, R premiers entre eux.

alors $\ker P(u) = \ker Q(u) \oplus \ker R(u)$.

Pour nous : $P = X^3 - 1$

$= (X-1)(X^2+X+1)$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & Q & R \text{ premiers entre eux} \end{array}$$

$$\ker P(u) = \ker Q(u) \oplus \ker R(u)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ E & & \ker(u - Id) \oplus \ker(u^2 + u + Id) \end{array}$$

car $P(u) = 0$ par hypothèse.

$\boxed{\checkmark}$