

TD 3 - Exo 6.

(i). $u \in \text{End}_k(E)$, E k -esp. v.

f.g. $u^3 = \text{Id}$.

M.g. $E = \ker(u - \text{Id})$

$\oplus \ker(u^2 + u + \text{Id})$.

Solution:

$\Leftrightarrow u^3 - \text{Id} = 0$

L'hypothèse $u^3 = \text{Id}$

equivaut à ce que le
polynôme $P(X) = X^3 - 1$

annule u :

$$P(u) = 0.$$

Maintenant on peut raisonner en termes de polynômes :

$$\boxed{X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)}$$

↑ ↑
premiers entre eux !

Rmq: ces polynômes sont premiers entre eux. Mais ce n'est pas parce que d'habitude ils sont irréductibles :

• $X - 1$ irred. car de degré 1

$X^2 + X + 1$ — irréd. sur \mathbb{R}
— réductible sur \mathbb{C}

$$(X - e^{2i\pi/3}) (X - e^{4i\pi/3})$$

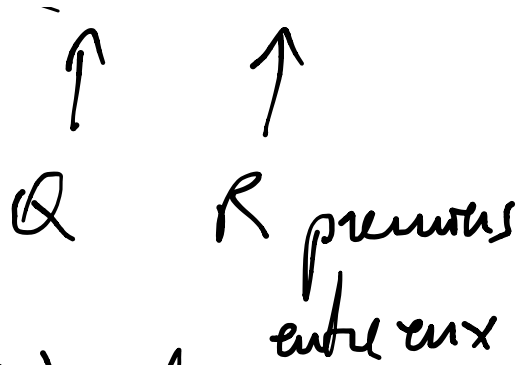
Mais le lemme des noyaux
admet une décomp. en facteurs
premiers entre eux :

Lemme des noyaux :

|| $P = Q \cdot R$, Q, R premiers entre
eux.

|| alors $\ker P(\alpha) = \ker Q(\alpha) \oplus \ker R(\alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{Pour nous : } P &= X^3 - 1 \\ &= (X-1)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$



$$\ker P(u) = \ker Q(u) \oplus \ker R(u)$$

$$\begin{array}{l}
 \curvearrowright \text{E} \parallel \\
 \ker (u - \text{Id}) \oplus \ker (u^2 + u + \text{Id}) \\
 \text{car } P(u) = 0 \text{ par hypothèse.}
 \end{array}$$

□