TD3 – Exercice 5

(Approximation par matrices diagonalisable).

M.q.

$\{$matrices diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})\}$ $\subseteq$ $M_n(\mathbb{C})$.
dense

C'est-à-dire :

diagonalisable !

$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists$ suite $A_k \in M_n(\mathbb{C})$, $k \geq 1$

t.q. $A_k \longrightarrow A$, $k \to \infty$

au sens suivant : $\forall\, i,j \in \{1, \dots, n\}$,

$$A_k(i,j) \longrightarrow A(i,j)$$

⚠ L'exercice n'est pas vide : il existe des matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ qui ne sont pas diagonalisables.

Par exple :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

- en effet, l'esp. propre pour la val. propre 1 est de dim. 1, alors que $\underline{1}$ est une val. propre de multiplicité algébrique 2. ↯
- argument alternatif : si elle était diagonalisable, sa forme diagonale

serait nécessairement $\quad P \in GL_2$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

donc $A = P \cdot I_2 \cdot P^{-1}$

$= I_2 \quad$ ↯.

Sur $\mathbb{C}$, toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

(puisque $\mathbb{C}$ algébriquement clos).

<u>Critère</u> : A trigonalisable sur $\mathbb{C}$ ssi

$P_A(X)$ scindé sur $\mathbb{C}$,

c'est-à-dire a toutes

ses racines dans $\mathbb{C}$,
ce qui est vrai pour tout
polyn. à coeff. cplxes.

Pour résoudre l'exo, utilisons le fait que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

- si A est triang. supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} \underline{*} & * & \cdots & * \\ & \underline{*} & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \underline{*} \end{pmatrix} , \quad k \geq 1$$

$a_{11} + \varepsilon_k^1$, $a_{22} + \varepsilon_k^2$, $a_{nn} + \varepsilon_k^n$

Si on choisit les suites $(\varepsilon_k^1)_{k\geq 1}$, $(\varepsilon_k^2)_{k\geq 1}$,

... $(\varepsilon_k^n)_{k\geq 1}$ t.q. $\forall i$, $\varepsilon_k^i \xrightarrow{k\to\infty} 0$ <u>et</u>

$\forall k$, les nombres $a_{11}+\varepsilon_k^1, \dots, a_{nn}+\varepsilon_k^n$ soient distincts deux à deux, on a gagné : la matrice A_k est <u>diagonalisable</u>.

en effet, les coeff. sur la diagonale $(a_{ii}+\varepsilon_k^i, i=1,\dots,n)$ sont les valeurs propres de A_k. S'ils sont tous distincts, on conclut que A_k diagonalisable.

$\boxed{\text{VII}}$

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

alors

les val. propres de A sont

$a_{11}, \ldots\ldots, a_{nn}$:

puisque $P_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & & \ast \\ & a_{22}-X & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn}-X \end{vmatrix}$

$$= \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X).$$

$\blacksquare$

- si A n'est pas triang. supérieure mais trigonalisable :

on peut trouver $P \in GL_n(\mathbb{C})$

t.q. $T = P^{-1}AP$ triang. sup.

On construit comme avant

une suite $\overline{T}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \overline{T}$

de matrices diagonalisables,

$$A = P \overline{T} P^{-1}$$

$$\uparrow {\scriptstyle k \to \infty}$$

$$\boxed{\overline{A_k} = P \overline{T}_k \overline{P}^{-1}}$$

Si $\overline{T}_k$ diagonalisable,

alors A_k diagonalisable car conjuguée à $\overline{T}_k$. $\square$

$$\overset{\parallel}{P T_k P^{-1}}$$

Rmq : Je dis que une matrice A est conjugué (ou semblable) à une matrice B s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n$ t.q.

$$A = PBP^{-1}.$$

Alors : • A et B ont le même polynôme caractéristique

• A diagonalisable ssi B diagonalisable

A diagonalisable $\Longleftrightarrow \exists\, Q \in GL_n$ t.q. $Q^{-1}AQ$ diagonale.

Mais $A = PBP^{-1}$ donc

$$Q^{-1}(PBP^{-1})Q \text{ diagonale}$$

$$\begin{gathered} Q^{-1}(PBP^{-1})Q \\ \| \\ (Q^{-1}P)\, B \cdot (P^{-1}Q) \\ \| \\ \underline{(Q^{-1}P)} \cdot B \cdot \underline{(Q^{-1}P)^{-1}} \end{gathered}$$

- A trigonalisable ssi B trigonalisable.

(la preuve est en tout point la même).