Feuille 3. Ex. 6. ii.

$u \in \mathrm{End}_k(V)$, V dim finie.

$P \in k[X]$ pol. annulateur pour u :

$$P(u) = 0.$$

On suppose que $P = Q \cdot R$, avec Q et R premiers entre eux.

Alors $\mathrm{im}(Q(u)) = \ker(R(u))$.

Solution :

Une inclusion est facile :

$$\mathrm{im}\, Q(u) \subseteq \ker R(u)$$

En effet, $\underline{R(u)} \circ \underline{Q(u)} = \underline{(R \cdot Q)}(u) = P(u) = 0$.

par hyp.

" $k[X] \longrightarrow \mathrm{End}_k(V)$ "

$P \longmapsto P(u)$ est un morph. d'algèbre

$$R(X) = \sum a_i X^i \Longrightarrow R(u) = \sum a_i u^i$$
$$Q(X) = \sum b_j X^j \Longrightarrow Q(u) = \sum b_j u^j$$

$$(R\cdot Q)(X) = \sum_{i,j} a_i b_j X^{i+j} \qquad R(u)\circ Q(u) = \sum_{i,j} a_i b_j \underbrace{u^i \circ u^j}_{u^{i+j}}$$

$$\| \qquad\qquad (R\cdot Q)(u)$$

$$R(u)\circ Q(u) = 0 \iff \mathrm{im}\, \overbrace{Q(u)}^{v} \subseteq \ker \overbrace{R(u)}^{w}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall y \in \mathrm{im}\, \overbrace{Q(u)}^{v},$$
$$\underbrace{R(u)}_{w}(y) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x,\ \underbrace{R(u)}_{w}\big(\underbrace{Q(u)(x)}_{v(x)}\big) = 0$$

Nous avons donc

$$\boxed{\mathrm{im}\, Q(u) \subseteq \ker R(u)}$$

Pour montrer l'égalité, nous montrons une égalité de dimensions :

$$\underline{\dim \operatorname{im} Q(u)} = \underline{\dim \ker R(u)}.$$

Exprimons-le en fonction de

$\underline{\dim \ker Q(u)}$ (et $n = \dim V$).

- $\dim \operatorname{im} Q(u) = n - \dim \ker Q(u)$.

  (thm. du rang).

- $\dim \ker R(u) \overset{?}{=} n - \dim \ker Q(u)$.

  Lemme des noyaux.

En effet : $\ker Q(u) \oplus \ker R(u) = \ker P(u) = V$

car $P(u) = 0$.

$\boxtimes$

Lemme des noyaux :

Si $P = Q \cdot R$, avec $Q, R \in k[X]$ premiers entre eux, et si $u \in \operatorname{End}_k(V)$, alors

$$\ker P(u) = \ker Q(u) \oplus \ker R(u).$$

$\boxed{\checkmark}$

Exercice 7.1.i.

$A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^3 = A^2$.

Montrer que A^2 diagonalisable.

Solution: Calculons A^4:

$$(A^2)^2 = A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot A^2 = A^3 = A^2$$

Polynôme qui annule A^2 ?

- $X^4 - X^2$ annule A.

$$X^2(X^2-1) = X^2(X-1)(X+1)$$

- $X^2 - X$ annule A^2 !

$\uparrow$

c'est un polynôme à racines simples.

$$X^2 - X = X(X-1).$$

Par un critère du cours, A^2 diagonalisable.

[<u>Prop</u>: Si $u \in \mathrm{End}_k(V)$ annulé par un poly. à racines simples, alors u diagonalisable.].

$\boxed{\checkmark}$

<u>Question</u>: exple de matrice 2×2 t.q. A^2 diagonalisable et A ne soit pas diagonalisable.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

si A était diag. sa forme diagonale serait 0, donc $A = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisable.

Essayons aussi

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci ne convient pas : B^2 n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, sa forme diagonale serait $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
et donc $B^2 = P \cdot \underbrace{D}_{I_2} \cdot P^{-1} = I_2$ ↯.

- $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \underline{\text{nilpotente}}\ (A^2 = 0)}$

$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \end{pmatrix}$ nilpotent

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{n} \qquad (V_n = 0)$$

<u>Commentaire à propos de l'exo. 6.ii :</u>

Si $P = P_u(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \cdot (X-\lambda_2)^{m_2}$.

Alors $V_{(\lambda_1)} = \mathrm{im}\,(u-\lambda_2 \mathrm{Id})^{m_2}$

$V_{(\lambda_1)} = \ker\,(u-\lambda_1 \cdot \mathrm{Id})^{m_1}$

Ainsi, les esp. caractéristiques peuvent être vus aussi comme des <u>images</u> de polyn. en u, pas seulement comme noyaux.