Feuille 4.

Exercice 1. Calculer la décomp. de Dunford des matrices suivantes $(a, b \neq 0)$.

[<u>Rappel</u>: Toute matrice (endomorphisme) A s'écrit de manière unique comme une somme

$$A = D + N.$$

avec D diagonalisable, N nilpotente et

$$DN = ND \quad (D, N \text{ commutant}).$$

"<u>décomposition de Dunford</u>"]

Le but de l'exo. 1 est de voir quelques exemples dans lesquels la décomp. de Dunford se lit directement / facilement sur la matrice, sans calculs.

(i) $$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N \text{ nilpotente} : N^2 = 0}.$$

commutent puisque I_2 commute avec toutes les autres matrices.

(ii) $$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{?}$ $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Nilpotente ? NON.}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d'ailleurs, on peut l'affirmer sans calcul : une mat. nilp. possède une unique val. propre $\lambda = 0$. Ce n'est pas le cas ici.

$\boxed{?}$ $$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diag. nilpotente.

Commutent ? <u>NON</u>.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Réponse</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable !

puisque ses deux valeurs propres sont distinctes $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2)$.

Sa décomp. de Dunford est

$$A = \underbrace{A}_{\text{diag.}} + \underbrace{0}_{\text{nilpotente}} \quad \text{(et commutent...)}$$

$\boxed{\text{IV}}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{diagonale.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente.}}$$

(triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale)

d). $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

? est-elle diagonalisable ? il faut tester la dimension de $\ker(A - I_3)$ $(\lambda = 1)$.

La matrice est diagonalisable ssi

$$\dim \ker(A - I_3) = 2.$$

$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est déjà sous forme échelonné.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}(e_1)$

Donc A pas diagonalisable !

Manière astucieuse d'utiliser le calcul précédent :

A diag. ssi. dim ker $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

(ce qui n'est pas valable)

Le défaut de diagonalisabilité est dû au fait que

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2. \quad (\dim\ker = 1)$$

alors que nous voudrions un rang $= 1$. $(\dim\ker = 2)$

Peut-on facilement modifier la matrice

$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour que son rang $=1$? ab !

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & a & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{1} \ !$$

Conclusion :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{diag.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente.}}$$

Commutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\parallel \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$