LU2MA123 - TD forme normale de Jordan

Rappel : $A \in M_n(k)$ avec $P_A(X)$ scindé sur k : il existe $P \in GL_n(k)$ t.q.

$$P^{-1}AP = T = \text{Diag}(\text{blocs de Jordan}).$$

bloc de Jordan de taille p :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{p} \Big\} p \quad J_p(\lambda) = \lambda \, Id + U_p.$$

2×2 : λ, μ val. propres (travaille sur $\mathbb{C}$)

- $\lambda \neq \mu$: A diagonalisable.

  FNJ : $\left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \mu \end{array}\right)$

- $\lambda = \mu$: A diagonalisable : $[A = \lambda \cdot Id]$

  FNJ : $\left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right)$: $\dim V_\lambda = 2$

A pas diag :

$$\text{FNJ} : \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}}_{J} : \quad \dim V_\lambda = 1, \quad \dim V_{(\lambda)} = 2 .$$

$$J - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J - \lambda I_2)^2 = 0 .$$

3x3 . λ, μ, ν val. propres.

. si distinctes 2 à 2 : A diagonalisable.

(Ex 6.a)

$$\text{FNJ} : \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \nu \end{pmatrix} .$$

. si $\mu = \nu$. (différent de λ)

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \mu \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & 1 \\ & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$\dim V_\lambda = 1$

$\dim V_\mu = 2$ $\quad\quad$ $\dim V_\mu = 1$, $\dim V_{(\mu)} = 2$

$\dim V_\lambda = 2$ $\quad\quad$ $\dim V_\lambda = 1$

$\dim V_{(\lambda)} = 3$ $\quad\quad$ $\dim V_{(\lambda)} = 3$.

· si $\lambda = \mu = \nu$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\simeq \left[\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \right]$$

on ignore ce cas : ce n'est que le type des blocs de Jordan à permutation près qui compte.

$\dim V_\lambda = 3$

$(A = \lambda I_3)$

<u>Polycopié</u> : # blocs Jordan de valeur propre λ $= \dim V_\lambda$.

Taille maximale des blocs de val. p. λ $=$ indice de nilpotence de $(A - \lambda \mathrm{Id})$ sur $V(\lambda)$.

Feuille 4. Ex. 4

Effectuer la réduction de Jordan pour les matrices suivantes. [i.e. trouver une FNJ et une matrice de passage : P t.q. $P^{-1}AP = T$]

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$P_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}A \cdot X + \det A .$$
$$= X^2 - (1-3)X + 1$$
$$= X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$$

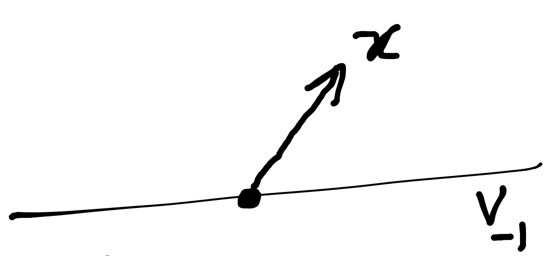
$\lambda = -1$ val. propre unique. mult. alg. 2

FNJ

$\cancel{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

[si $P^{-1}AP = -Id$
$\Rightarrow A = -Id$ ↯]

Pour calculer la mat. de passage : $\ker (A + I_2)^2 = k^2$



on calcule V_{-1}, on prend un vecteur $x \notin V_{-1}$

et on lui applique $A - \lambda I_2 = A + I_2$:

Alors $((A+I_2)x, x)$ base de passage.

i.e. mat. de passage est $\big((A+I_2)x \,|\, x \big)$.

Calcul : $\ker(A+I_2) = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$= \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Prenons un $\vec{v}$: $x \notin \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, disons

$$\boxed{x = e_2}$$

Alors $(A+I_2)x = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

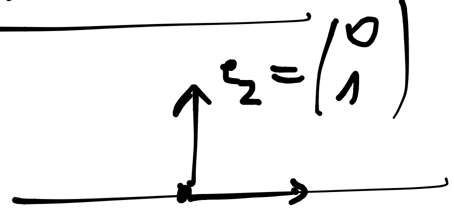
Vérification : $P^{-1}AP$

$$\begin{pmatrix}1/2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1/2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix} \checkmark$$

Autre manière : si on veut trianguler :

$V_{(-1)} = k^2$



$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $V_{-1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Ds la base $\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{y}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{e_2}\right)$ la matrice devient triang. sup.

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} : \tilde{P}^{-1}AP = \begin{pmatrix}-1&?\\0&-1\end{pmatrix}$$

Par définition : $A\cdot e_2 = -e_2 + ?\,y$

ou encore $(A+I_2)e_2 = ?\,y$

Je calcule : $\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = 2\cdot y$

Donc ? $= 2$.

Autrement dit, ds la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, la matrice devient

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $y' = 2y$. Alors $Ae_2 = -e_2 + y'$.

(c'est encore un $\vec{v}$ propre)

et ds la base (y', e_2) la matrice est $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

✓

<u>4b</u>: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_B(X) = -X(X-1)^2.$$

$\lambda = 0$ mult. alg. 1

$\lambda = 1$ mult. alg. 2.

FNJ

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \boxed{1} & \\ & & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcul $\underline{\underline{V_1}} = \ker(B - I_3) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\underline{\text{dim. } 1}$

Ceci entraîne que FNJ est

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice de ~~passage~~ :

$$V_0 = \ker(B) = \text{Vect}\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}.$$

$\underline{\text{Manière 1}}$: calculer $V_{(1)} = \ker(B - I_3)^2$

$$= \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{y}$$

Ds la base $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{engendre } V_0}, \underbrace{\underbrace{(A - I_3)y}_{\text{engendre } V_1}, y}_{\text{engendrent } V_{(1)}} \right)$ la matrice prend FNJ.

$\boxed{12}$

4c). $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P_C(X) = -(X-2)^3$.

$\lambda = 2$ val. propre de mult. alg. 3.

FNJ.

$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$

$\#$ blocs $=$ dim V_2.

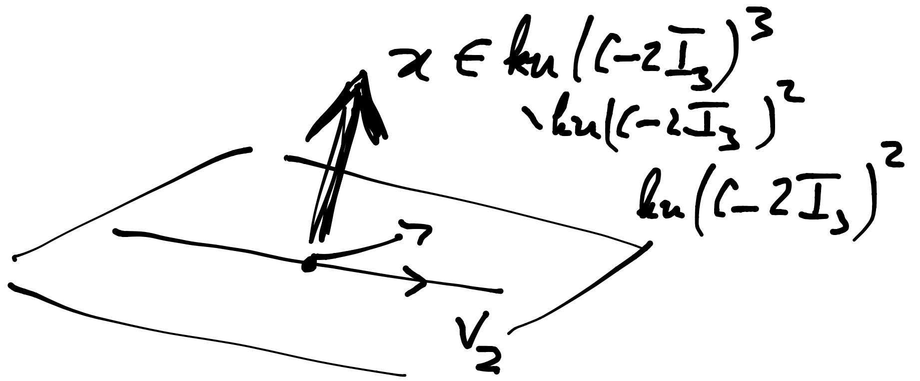
Calculons

$V_2 = \ker(C - 2I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dim. $\underline{1}$.

Ceci nous dit que $\boxed{\text{FNJ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}}$

Indice de nilpotence de $C-2I_3$ est égal à celui de $J_3(2)-2I_3 = U_3$, donc 3

$$\begin{array}{ccccc} V_2 & & & & V_{(2)} = k^3 \\ \| & & & & \| \\ \ker(C-2I_3) & \subsetneq & \ker(C-2I_3)^2 & \subsetneq & \ker(C-2I_3)^3 \\ \dim 1. & & \dim 2 & & \dim 3 \end{array}$$



Base de Jordan :

$$\left((C-2I_3)^2 x,\ (C-2I_3)x,\ x \right)$$

<u>Calcul</u> :

$$V_2 = \ker(C-2I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(C-2I_3)^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad //$$

Je peux prendre x qque ds le complém. de ce plan vectoriel. Ex : e_3 ne convient pas

mais e_1 convient.

Base de Jordan : $\left((C-2I_3)^2 e_1, (C-2I_3)e_1, e_1\right)$

4d. $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_D(X) = (1-X)^3$$

FNJ

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(puisque $D \neq I_3$)

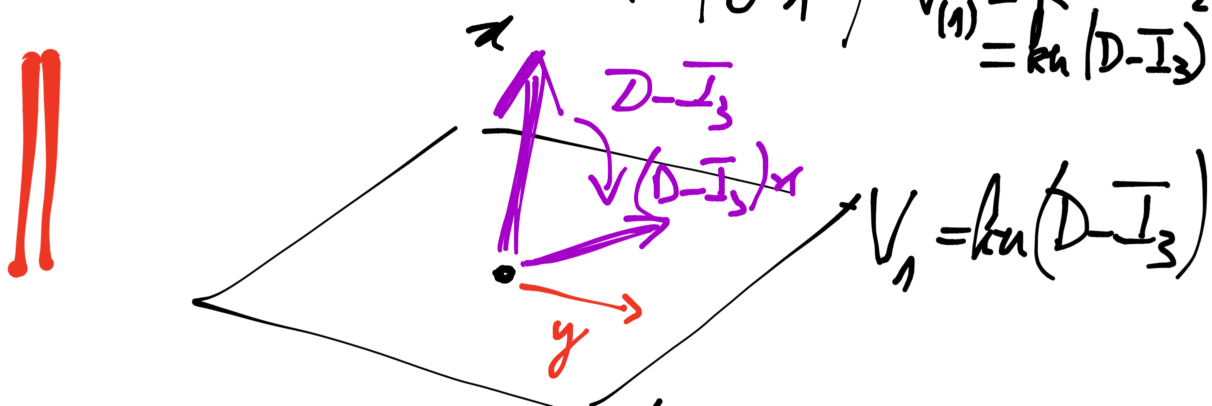
$\#$ blocs $= \dim V_1$.

<u>Calcul :</u> $V_1 = \ker(D - I_3) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \ker(x + y - z)$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La FNJ est donc $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{array}\right)$.

$V_{(1)} = k^3 = \ker(D - I_3)^2$



Soit $x \notin V_1$. Alors $(D - I_3)x \in V_1$.

et on complète $(D - I_3)x$ à une base de V_1 en lui rajoutant un vecteur y.

Base de Jordan est $\underbrace{(\underbrace{y, (D - I_3)x}_{\text{engendrent } V_1}, x)}_{\text{base de } k^3 = V_{(1)}}$

Par exple : $x = e_3$

alors $(D - I_3) e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les 2 $\vec{v}$ qui engendrent V_1

Je choisis par exple $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors base de Jordan :

$$(y, (D - I_3)x, x) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \checkmark$$