Sorbonne Université

Licence de Mathématiques

Année 2019–2020

LU2MA123 - Algèbre linéaire et bilinéaire IIb

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

par Alexandru OANCEA

Remerciements :

à Vincent Humilière, Patrick Polo, Pierre-Antoine Guihéneuf, Marco Maculan pour m'avoir prêté leurs polycopiés et archives.

Bibliographie :

X. Gourdon, *Les maths en tête : Algèbre*, Ellipses, 2009.

L. Koelblen, P. Polo, V. Humilière, *Algèbre et géométrie/Algèbre linéaire 2, espaces affines*, polycopiés 2009–2016, Université Pierre et Marie Curie.

https://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo/LM270/polyLM270-2013.pdf

https://webusers.imj-prg.fr/~vincent.humiliere/2M270-2016/Poly2M270-2016.pdf

M. Audin, O. Debarre, *Algèbre linéaire 2*, polycopié 1998/1999, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

https://www.math.ens.fr/~debarre/DEUG2.pdf

Page web du cours :

https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2020-L2-LU2MA123/LU2MA123-2020.html

Alexandru OANCEA

Sorbonne Université

Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche (UMR 7586 du CNRS)

URL : http://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea

E-mail : alexandru.oancea@imj-prg.fr

TABLE DES MATIÈRES

0. Rappels : valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisabilité 1

0.1. Somme directe de sous-espaces 1

0.2. Espaces propres et critères de diagonalisabilité 2

0.3. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme 3

1. Réduction des endomorphismes 5

1.1. Critère de diagonalisabilité 5

1.2. Sous-espaces stables 6

1.3. Trigonalisation 8

1.4. Polynômes d'endomorphismes et applications 10

1.5. Appendice (†) : somme directe externe d'espaces vectoriels 13

1.6. Appendice (†) : division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$ et théorème de Bézout 14

1.7. Appendice (†) : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos 16

2. Décomposition de Jordan, Décomposition de Dunford, exponentielles de matrices 19

2.1. Endomorphismes nilpotents, partitions et formes normales de Jordan 19

2.2. Décomposition de Dunford 31

2.3. Exponentielles de matrices 34

2.4. Exponentielles de matrices et équations différentielles linéaires 40

2.5. Appendice (†) : Espaces quotients 42

2.6. Appendice (†) : Normes sur $\mathbb{K}^n$ et produits de séries absolument convergentes 46

CHAPITRE 0

RAPPELS : VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES, DIAGONALISABILITÉ

Ce chapitre 0 est constitué de **rappels** sur la diagonalisation des endomorphismes, telle que vue dans le cours LU2MA221 "Algèbre linéaire et bilinéaire I" en L2 S3. La référence est la section §4.2 du polycopié de Yves Coudène, qui est disponible à l'adresse

`https://www.lpsm.paris/pageperso/coudene/2MA221-algebre-lineaire-bilineaire-I.html`

Nous allons revisiter ces notions dans le cours. Nous supposons connue la méthode du pivot pour la résolution des systèmes linéaires $AX = Y$.

0.1. Somme directe de sous-espaces

***Définition 0.1.1* (Sous-espaces en somme directe).** — Soient V un k-espace vectoriel, $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces de V. (Ni V ni les E_i ne sont supposés de dimension finie.)

(1) La *somme des sous-espaces* $E_1, \dots, E_n$, notée $E_1 + \cdots + E_n$ ou $\sum_{i=1}^n E_i$, est le sous-espace de V engendré par $E_1 \cup \cdots \cup E_n$. L'on montre que

$$(*) \qquad E_1 + \cdots + E_n = \{x_1 + \cdots + x_n \ : \ \forall i,\, x_i \in E_i\}.$$

(2) On dit que les E_i *sont en somme directe* si pour tous $x_1 \in E_1$, …, $x_n \in E_n$, l'égalité $x_1 + \cdots + x_n = 0$ entraîne $x_1 = 0 = \cdots = x_n$. Ceci équivaut à dire que tout élément x de $E_1 + \cdots + E_n$ s'écrit *de façon unique* $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_i$. Dans ce cas, $E_1 + \cdots + E_n$ est noté $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ ou $\bigoplus_{i=1}^n E_i$.

Si les sous-espaces E_i, $i = 1, \dots, n$ sont de dimension finie, alors ils sont en somme directe si et seulement si

$$(\star) \qquad \dim(E_1 + \cdots + E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

***Terminologie 0.1.2*.** — Si $E_1, \dots, E_n$ sont en somme directe et si de plus $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ égale V, alors on dit que V est la somme directe des E_i.

***Remarques 0.1.3*.** — (1) Il résulte de la définition que $E_1, \dots, E_n$ sont en somme directe si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a : $E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = 0$.

(2) En particulier, si $n = 2$, alors E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = (0)$.

[(0)]version du 21/1/2020

(3) **Attention !** Si des sous-espaces sont en somme directe, leur somme n'est pas nécessairement égale à l'espace tout entier : par exemple si E_1, E_2 sont deux droites distinctes dans $\mathbb{R}^3$, leur somme est directe, et c'est un plan de $\mathbb{R}^3$, et non $\mathbb{R}^3$ tout entier !

(4) **Attention !** Si $n \geq 3$, la condition $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour $i \neq j$ *n'entraîne pas* que la somme des E_i soit directe : par exemple si E_1, E_2, E_3 sont trois droites distinctes dans $\mathbb{R}^2$, elles vérifient $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour $i \neq j$, mais leur somme n'est pas directe (car $E_1 + E_2$ égale $\mathbb{R}^2$ donc contient E_3).

***Définition 0.1.4* (Sous-espaces supplémentaires).** — Soient V un espace vectoriel, E, F deux sous-espaces de V. On dit que E et F sont des sous-espaces *supplémentaires* si $V = E \oplus F$, c.-à-d., si $E \cap F = (0)$ et $E + F = V$.

Si V est de dimension finie, ceci équivaut à dire que $E \cap F = (0)$ et $\dim(E) + \dim(F) = \dim(V)$.

Proposition 0.1.5. — *Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n. Tout sous-espace E de V admet un supplémentaire.* □

Remarque 0.1.6. — Soient V un espace vectoriel et E, F deux sous-espaces de dimension finie. Alors

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F).$$

0.2. Espaces propres et critères de diagonalisabilité

***Définition 0.2.1* (valeurs propres, vecteurs propres).** — Soit V un k-espace vectoriel et u un endomorphisme de V. Un scalaire $\lambda \in k$ est une *valeur propre de u* s'il existe $x \in V \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$, ou encore si

$$\ker(u - \lambda \mathrm{Id}) \neq 0.$$

Un élément $x \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$ s'appelle *vecteur propre pour la valeur propre* λ. Le sous-espace

$$V_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}) \subseteq V$$

s'appelle *sous-espace propre pour la valeur propre* λ.

Théorème 0.2.2. — *Soient V un k-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie), u un endomorphisme de V, et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes. Pour $i = 1, \dots, r$, on note*

$$E_i = V_{\lambda_i} = \{v \in V \mid u(v) = \lambda_i v\}$$

le sous-espace propre associé. Alors les V_{λ_i} sont en somme directe.

Démonstration. — Montrons par récurrence sur $r \geq 1$ l'assertion suivante : si l'on a une égalité $x_1 + \cdots + x_r = 0$ avec $x_i \in V_{\lambda_i}$, alors $x_1 = \cdots = x_r = 0$. Il n'y a rien à démontrer pour $r = 1$, donc on peut supposer $r \geq 2$ et l'assertion établie pour $r - 1$. L'on a $u(x_1 + \cdots + x_r) - \lambda_r(x_1 + \cdots + x_r) = 0$, ou encore

$$(\lambda_1 - \lambda_r)x_1 + \cdots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)x_{r-1} = 0.$$

L'hypothèse de récurrence assure que, pour tout $i = 1, \dots, r - 1$, l'on a $(\lambda_i - \lambda_r)x_i = 0$, ou encore $x_i = 0$ puisque $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$. Or $x_1 + \cdots + x_r = 0$, ce qui entraîne $x_r = 0$ et achève la démonstration. □

La somme $\bigoplus_{i=1}^r V_{\lambda_i}$ n'est pas nécessairement égale à V ; si V est de dimension finie, c'est le cas si et seulement si il existe une base formée de vecteurs propres de u.

***Définition 0.2.3* (Endomorphismes diagonalisables).** — Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}_k(V)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une base de V dans laquelle la matrice de u est diagonale.
(ii) V admet une base formée de vecteurs propres de u ;
(iii) les vecteurs propres de u engendrent V ;
(iv) la somme des espaces propres de u égale V ;
(v) V est la somme directe des espaces propres de u.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que u est *diagonalisable.*

***Proposition 0.2.4* (Valeurs propres distinctes).** — *Soit $u \in \mathrm{End}_k(V)$ ($\dim_k(V) = n$). Si u possède n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.*

Démonstration. — L'endomorphisme u possède n espaces propres distincts $V_1, \ldots, V_n$, qui sont en somme directe d'après le théorème précédent. Alors le sous-espace $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ de V est de dimension

$$n \geq \dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim V_i \geq n = \dim V.$$

Ainsi $\dim E = \dim V$ et par conséquent $V = E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. De plus, chaque V_i est nécessairement de dimension 1. $\square$

Cette proposition fournit une condition *suffisante* de diagonalisabilité. Bien entendu, cette condition n'est **pas nécessaire** : par exemple la matrice identité I_n (≥ 2) est diagonale et a toutes ses valeurs propres égales à 1.

0.3. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n. L'outil fondamental pour trouver les valeurs propres d'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_k(V)$ est son *polynôme caractéristique*

$$P_u(X) = \mathrm{dét}(u - XI_n) \in k[X].$$

Celui-ci est défini de la manière suivante : l'on choisit une base quelconque de V, l'on représente u par une matrice $A \in M_n(k)$ et l'on pose

$$P_u(X) = \mathrm{dét}(A - XI_n) \in k[X].$$

La définition ne dépend pas du choix de la base.

Proposition 0.3.1. — *Un scalaire $\lambda \in k$ est valeur propre de u si et seulement si il est racine du polynôme caractéristique.*

Démonstration. — L'équation $u(x) = \lambda x$, $x \in V$ équivaut à $(u - \lambda \mathrm{Id})x = 0$. L'existence d'une solution non-nulle équivaut à la non-injectivité de l'application linéaire $u - \lambda \mathrm{Id} : V \to V$. Puisque V est de dimension finie, ceci équivaut à l'annulation du déterminant $\mathrm{dét}(u - \lambda I_n) = P_u(\lambda)$. $\square$

Corollaire 0.3.2. — *Soit $u \in \mathrm{End}_k(V)$ ($\dim_k(V) = n$). Si le polynôme caractéristique $P_u(X)$ possède n racines distinctes, alors u est diagonalisable.* $\square$

CHAPITRE 1

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

La terme de “réduction des endomorphismes” fait référence au problème suivant.

Problème (réduction des endomorphismes). Étant donné un k-espace vectoriel V (de dimension finie n) et un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_k(V)$, trouver une base de V dans laquelle la matrice de u prend la forme “la plus simple possible”.

Les applications les plus simples sont les homothéties $\lambda\mathrm{Id}$, $\lambda \in k$. C'est une des raisons pour lesquelles l'on a introduit dans la section précédente les notions de *valeur propre* et *sous-espace propre* de u. Dans ce chapitre, nous allons raffiner cette étude. On y démontre les théorèmes de trigonalisation, de Cayley-Hamilton, de décomposition en espaces caractéristiques, la décomposition de Dunford et le lemme des noyaux.

Les appendices contiennent les preuves du théorème de Bézout et du fait que le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Sauf mention contraire tous les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1.1. Critère de diagonalisabilité

Dans la section précédente nous avons vu une condition suffisante de diagonalisabilité. Celle-ci peut être complétée en une condition nécessaire et suffisante (CNS).

Définition et proposition 1.1.1 **(Multiplicités algébrique et géométrique d'une valeur propre)**

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines (deux à deux distinctes) du polynôme caractéristique $P_u(X)$ dans $\mathbb{C}$. D'une part, $P_u(X)$ se factorise

$$P_u(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où m_i est la multiplicité de λ_i comme racine de $P_u(X)$. D'autre part, d'après la Proposition (0.3.1), $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de u.

On appelle multiplicité algébrique *(resp.* géométrique*) de la valeur propre λ_i sa multiplicité m_i comme racine de $P_u(X)$ (resp. la dimension n_i de l'espace propre V_{λ_i}).*

(1) *On a $\dim V_{\lambda_i} \leq m_i$ pour tout i.*

(2) *u est diagonalisable $\Longleftrightarrow \dim V_{\lambda_i} = m_i$ pour tout i.*

(0) version du 21/01/2020

Démonstration. — (1) Pour tout i, soit $\mathscr{C}^i$ une base de V_{λ_i}. Comme les espaces propres sont en somme directe, la famille $\mathscr{C} = \mathscr{C}^1 \cup \cdots \cup \mathscr{C}^r$ est une famille libre, donc on peut la compléter en une base $\mathscr{B}$ de V. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est de la forme suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & * \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots & * \\ \hline 0 & \ddots & \ddots & 0 & * \\ \hline \vdots & \ddots & 0 & \lambda_r I_{n_r} & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & B \end{array}\right)$$

où B est une matrice carrée de taille $p = n-(n_1+\cdots+n_r)$. En particulier, A est triangulaire par blocs et l'on en déduit l'égalité

$$P_u(X) = \mathrm{dét}(A - XI_n) = P_B(X)\prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{n_i}.$$

Donc $\prod_{i=1}^r(\lambda_i - X)^{n_i}$ divise $P_u(X)$, d'où $n_i \leq m_i$ pour tout i, ce qui prouve (1).

(2) Si $n_i = m_i$ pour tout i, alors le sous-espace $E = \bigoplus_{i=1}^r V_{\lambda_i}$ est de dimension $\sum_{i=1}^r m_i = n$, donc égale V, donc u est diagonalisable. Réciproquement, si u est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B}$ de V telle que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{n_r} \end{array}\right)$$

alors $P_u(X) = \mathrm{dét}(A - XI_n) = \prod_{i=1}^r(\lambda_i - X)^{n_i} = (-1)^n\prod_{i=1}^r(X-\lambda_i)^{n_i}$, d'où $n_i = m_i$ pour tout i. □

Le critère (1.1.1) est utile en pratique : étant connues les racines du polynôme caractéristique avec leurs multiplicités, l'on calcule les sous-espaces propres correspondants. Pour déterminer si l'endomorphisme u est diagonalisable l'on compare la multiplicité algébrique à la multiplicité géométrique.

Les espaces propres sont en somme directe, mais leur somme n'est E que si u est diagonalisable. Par exemple, la seule valeur propre de la matrice carrée

$$U_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

est 0 et l'espace propre associé est de dimension 1.

1.2. Sous-espaces stables

La notion clé dans le problème de la réduction des endomorphismes est celle de sous-espace stable.

***Définition 1.2.1* (Sous-espace stable).** — Soit $u \in \mathrm{End}_k(V)$. On dit qu'un sous-espace E de V est *stable par u* si

$$u(E) \subseteq E.$$

Dans ce cas, la restriction de u à E induit un endomorphisme de E, noté $u|_E$ ou u_E.

Exemple 1.2.2. — Les sous-espaces propres d'un endomorphisme u sont stables par u. La restriction de u à chaque sous-espace propre est une homothétie.

Remarque 1.2.3. — Supposons que E est un sous-espace stable par u, choisissons une base de E et complétons-là en une base de V. La matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure par blocs

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où A représente la matrice de $u|_E$ dans la base choisie.

Supposons que l'on a trouvé une décomposition $V = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ en somme directe de sous-espaces stables par u, de sorte que $u(E_i) \subseteq E_i$ pour tout i. Définissons une base de V en concaténant des bases de $E_1, \ldots, E_r$. La matrice de u dans cette base est diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

où A_i représente la matrice de $u|_{E_i}$ dans la base choisie.

Lorsque l'endomorphisme u est diagonalisable la situation peut être reformulée en termes de sous-espaces stables de la manière suivante : l'on a une décomposition $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$ en somme directe de sous-espace propres, chaque V_{λ_i} est stable par u et sa dimension est égale à la multiplicité algébrique de λ_i. La restriction $u|_{V_{\lambda_i}}$ est une homothétie de rapport λ_i et la matrice de u dans une base constituée de vecteurs propres est diagonale.

Pour mieux saisir la notion de sous-espace stable, nous donnons maintenant un résultat et un exemple qui en font usage.

***Proposition 1.2.4* (Restriction d'un endomorphisme diagonalisable)**

Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathrm{End}_k(V)$ un endomorphisme diagonalisable, E un sous-espace de V stable par u. Alors E admet une base formée de vecteurs propres de u, i.e. la restriction u_E de u à E est diagonalisable.

Démonstration. — La preuve est une variation sur celle du Théorème 0.2.2. D'après 0.2.3, il suffit de montrer que E est engendré par des vecteurs propres de u. Comme u est diagonalisable, tout $x \in E$ s'écrit dans V comme une somme de vecteurs propres :

$$(\dagger) \qquad x = x_1 + \cdots + x_r, \qquad \text{avec} \quad x_i \in V_{\mu_i} \quad \text{et} \quad \mu_i \neq \mu_j \text{ si } i \neq j.$$

Montrons par récurrence sur r que pour tout $x \in E$ et toute écriture $(\dagger)$ comme ci-dessus, chaque x_i appartient à E (ce qui prouvera le théorème). C'est OK pour $r = 1$, donc on peut supposer $r \geq 2$ et le résultat démontré pour $r - 1$. Appliquant $u - \mu_r \,\mathrm{id}_V$ à $(\dagger)$ on obtient

$$x' = (u - \mu_r \,\mathrm{id}_V)(x) = \sum_{i=1}^{r-1} (\mu_i - \mu_r) x_i$$

et $x' \in E$ puisque E est stable par u. Donc par hypothèse de récurrence, chacun des vecteurs propres $(\mu_i - \mu_r)x_i$, $i = 1, \dots, r-1$ appartient à E, donc x_i appartient aussi à E puisque $\mu_i - \mu_r \neq 0$. En reportant ceci dans (†) on obtient $x_r \in E$, ce qui prouve le théorème. □

Rappels 1.2.5. — Soit k un corps. Si $n \cdot 1_k = 1_k + \cdots + 1_k$ (n termes) est $\neq 0$ pour tout entier $n > 0$, on dit que k *est de caractéristique* 0 ; c'est le cas par exemple pour $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Sinon, le plus petit entier $p > 0$ tel que $p \cdot 1_k = 0$ est nécessairement un nombre premier (car si $p = rs$ avec $r, s \geq 1$, l'égalité $0 = (r \cdot 1_k)(s \cdot 1_k)$ entraîne que $r \cdot 1_k = 0$ ou $s \cdot 1_k = 0$, disons $r \cdot 1_k = 0$, mais alors la minimalité de p entraîne que $r = p$) ; dans ce cas on dit que k *est de caractéristique* p. D'autre part, si V est un k-espace vectoriel et $p \in \mathrm{End}_k(V)$, rappelons qu'on dit que p est un **projecteur** si $p^2 = p \circ p$ est égal à p.

***Exemple 1.2.6* (Symétries)**. — Soient k un corps de caractéristique $\neq 2$ (par exemple, $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), V un k-espace vectoriel de dimension n, et $s \in \mathrm{End}_k(V)$ tel que $s^2 = \mathrm{id}_V$. Alors s est diagonalisable ; plus précisément, soient

$$p_+ = \frac{\mathrm{id}_V + s}{2}, \qquad p_- = \frac{\mathrm{id}_V - s}{2}, \qquad V_\pm = \mathrm{Im}(p_\pm).$$

Alors p_+ et p_- sont des projecteurs et l'on a :

$$V = V_+ \oplus V_- \qquad \text{et} \qquad \forall x \in V_\pm, \quad s(x) = \pm x.$$

Donc, si $s \neq \pm \mathrm{id}_V$, alors V_+ et V_- sont non-nuls et $V_\pm$ est l'espace propre associé à la valeur propre ± 1 ; dans ce cas, s est la symétrie par rapport à V_+ parallèlement à V_-.

Pour montrer ces affirmations notons les identités suivantes : $p_+^2 = p_+$, $p_-^2 = p_-$ et $p_- = \mathrm{id}_V - p_+$ d'où $p_+ p_- = 0 = p_- p_+$. Ainsi p_+ et p_- sont des projecteurs et l'on a $V = V_+ \oplus V_-$. De plus, si $x \in V_\pm$, on voit aussitôt que $s(x) = \pm x$, ce qui achève la preuve.

Remarque 1.2.6.1. — Attention, si k est de caractéristique 2, c.-à-d., si $2 = 0$ dans k (par exemple, si k est le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(k)$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ mais A n'est pas diagonalisable : en effet sa seule valeur propre est 1, donc si A était diagonalisable on aurait $A = I_2$, ce qui n'est pas le cas.

1.3. Trigonalisation

***Définition 1.3.1* (Endomorphismes trigonalisables)**. — Soit $u \in \mathrm{End}_k(V)$. On dit que u est *trigonalisable* s'il existe une base $\mathscr{B}$ de V dans laquelle la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire, disons supérieure. (1)

Dans ce cas, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux ($n = \dim_k V$), et soit X une indéterminée. Alors

$$P_u(X) = \mathrm{dét}(A - XI_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - X)$$

donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les n racines (comptées avec multiplicités) du polynôme caractéristique $P_u(X)$. On voit donc qu'une condition *nécessaire* pour que u soit trigonalisable est que $P_u(X)$ ait toutes ses racines dans k. Ceci conduit à la définition suivante :

(1) Si la matrice de u dans une base $(v_1, \dots, v_n)$ est triangulaire supérieure, alors la matrice dans la base $(v_n, \dots, v_1)$ est triangulaire inférieure, et vice-versa, donc on pourrait dans la définition remplacer le mot « supérieure » par « inférieure ».

***Définition 1.3.2* (Polynômes scindés, corps algébriquement clos)**

Soient k un corps et $P \in k[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

(1) On dit que P est *scindé* dans $k[X]$ s'il admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans k (comptées avec multiplicités), c.-à-d., si P se factorise dans $k[X]$ en produit de facteurs de degré 1 :

$$P = a(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$$

(où a est le coefficient dominant de P).

(2) On dit que k est *algébriquement clos* si tout polynôme $P \in k[X]$ de degré ≥ 1 est scindé. Par exemple, on sait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (une démonstration est donnée dans un appendice à ce chapitre).

***Théorème 1.3.3* (Trigonalisation).** — *Un endomorphisme $u \in \operatorname{End}_k(V)$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans k.*

En particulier, lorsque $k = \mathbb{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable.

Démonstration. — L'implication directe a été démontrée plus haut, il s'agit de prouver l'implication inverse.

On procède par récurrence sur la dimension n de E. Lorsque $n = 1$ il n'y a rien à démontrer, l'on suppose donc $n \geq 2$ et l'affirmation démontrée pour $n - 1$. Il existe par hypothèse une racine λ dans k du polynôme caractéristique, c'est-à-dire une valeur propre. Soit e un vecteur propre associé, soit E_1 la droite vectorielle engendrée par e et soir E_2 un supplémentaire de E_1 dans E. Comme discuté dans la remarque 1.2.3, la matrice de u dans une base de E constituée de e et d'une base de E_2 est "triangulaire supérieure par blocs" du type

$$\begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, l'on a $P_u(X) = (\lambda - X)P_{u|_{E_2}}(X)$ et, puisque $P_u(X)$ est scindé sur k, il en est de même pour $P_{u|_{E_2}}(X)$. Puisque $\dim E_2 = n - 1$ nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme $u|_{E_2}$ dont la matrice est C : dans une base convenable de E_2 sa matrice est triangulaire supérieure. Si l'on ajoute e à cette base on obtient une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. □

***Corollaire 1.3.4* (Déterminant (resp. trace) = produit (resp. somme) des valeurs propres)**

Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité) du polynôme caractéristique $P_A(X)$. Alors

$$\operatorname{dét}(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n, \qquad \operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Démonstration. — D'après le théorème 1.3.3, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit triangulaire ; notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux, alors

$$P_{A'}(X) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - X), \qquad \operatorname{dét}(A') = \lambda_1 \cdots \lambda_n, \qquad \operatorname{Tr}(A') = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

D'autre part A' et A ont même polynôme caractéristique, même déterminant et même trace. Alors $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les racines de $P_A(X) = P_{A'}(X)$ et l'on a $\operatorname{dét}(A) = \operatorname{dét}(A') = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ et $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A') = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. □